# Time Domain FEM Analysis of Three Dimensional Electro-magnetic Waveguide Discontinuity Problems Using Perfectly Matched Layers (PML)

ryujimiya

2024 年 10 月 06 日

## 1　はじめに

3 次元電磁導波路 (three dimensional electro-magnetic waveguide) の不連続問題 (discontinuity problem) を完全整合層 (Perfectly Matched Layers, PML) を用いて時間領域で解く。

## 2　弱形式

図のような x 方向 PML を装荷した導波路不連続問題を考える。

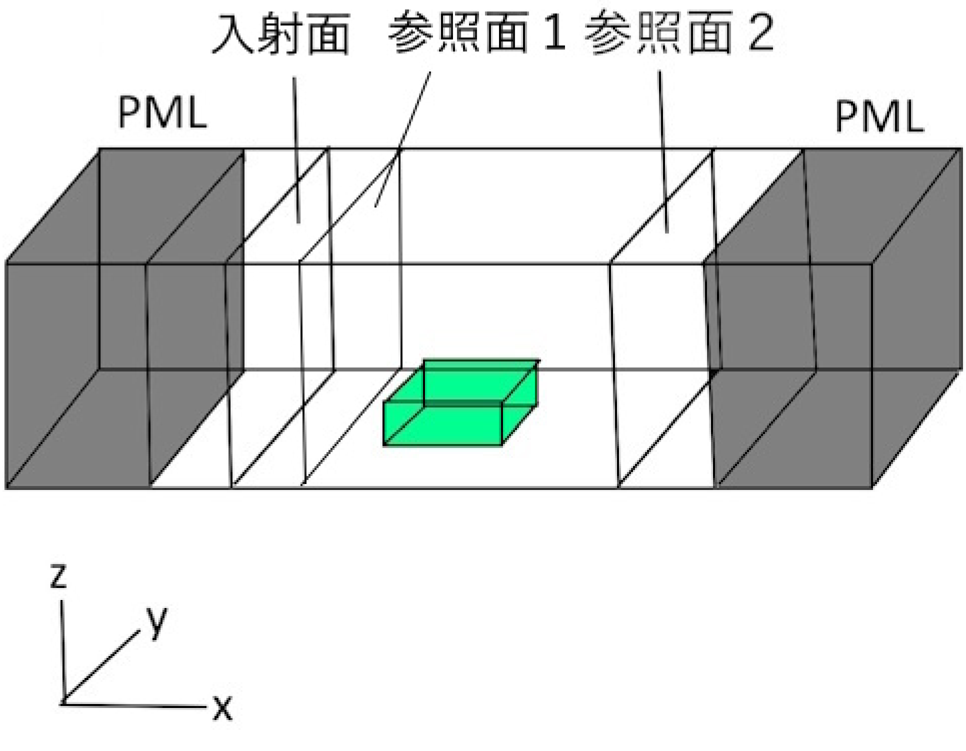


図 1　discontinuity with PML

PML 領域も含めた領域全体の電界 $\boldsymbol{E}$ に関する周波数領域の波動方程式は、

$$\nabla \times \mu_r^{-1}\Lambda^{-1}\nabla \times \boldsymbol{E} - \frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_r\Lambda\boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

$\omega$ は角周波数、$c_0$ は真空中の光速であり、$\mu_0$: 真空中の透磁率、$\epsilon_0$: 真空中の誘電率、$\mu_r$: 媒質の比透磁率、$\epsilon_r$: 媒質の比誘電率である。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & & \\ & s_x & \\ & & s_x \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} s_x & & \\ & \frac{1}{s_x} & \\ & & \frac{1}{s_x} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$s_x = 1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \tag{4}$$

ここで $\sigma_x$ は x 方向 PML の導電率であり、

$$\sigma_x = \sigma_{xmax}\left(\frac{|x - x_0|}{l_{\mathrm{PML}}}\right)^2 \tag{5}$$

$$\sigma_{xmax} = \frac{3}{2l_{\mathrm{PML}}}\sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}ln\left(\frac{1}{R_0}\right) \tag{6}$$

$x_0$: PML の始点 (内部領域との境界) の X 座標
$l_{\mathrm{PML}}$ : PML の厚さ
$R_0$: PML の外へと垂直入射したときの反射係数を意味する小さい数 (あらかじめ指定する値)
である。
ガラーキン法を適用する。「Frequency Domain FEM Analysis of Three Dimensional Electro-magnetic Waveguide Discontinuity Problems Using Perfectly Matched Layers」を参照。周波数領域の弱形式は、

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \times \boldsymbol{N}_i \cdot \mu_r^{-1}\Lambda^{-1}\nabla \times \boldsymbol{E} - \frac{\omega^2}{c_0^2}\boldsymbol{N}_i \cdot \epsilon_r\Lambda\boldsymbol{E}dV \\ + \int_S \boldsymbol{N}_i \cdot (\boldsymbol{n} \times \mu_r^{-1}\Lambda^{-1}\nabla \times \boldsymbol{E})dS = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

体積分の各項は次のように計算する。

$$\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{N}_i \cdot \mu_r^{-1}\Lambda\nabla \times \boldsymbol{E} \\ &= \begin{bmatrix} r_{nx} \\ r_{ny} \\ r_{nz} \end{bmatrix}^T \mu_r^{-1} \begin{bmatrix} s_x & & \\ & \frac{1}{s_x} & \\ & & \frac{1}{s_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \\ &= r_{nx}\mu_r^{-1}s_xr_x + r_{ny}\mu_r^{-1}\frac{1}{s_x}r_y + r_{nz}\mu_r^{-1}\frac{1}{s_x}r_z \end{aligned} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{N}_i \cdot \epsilon_r \Lambda \boldsymbol{E} \\
&= \begin{bmatrix} N_{ix} \\ N_{iy} \\ N_{iz} \end{bmatrix}^T \epsilon_r \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & & \\ & s_x & \\ & & s_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \\
&= N_{ix}\epsilon_r \frac{1}{s_x} E_x + N_{iy}\epsilon_r s_x E_y + N_{iz}\epsilon_r s_x E_z
\end{aligned} \tag{9}
$$

ここにおいて、

$$
\begin{aligned}
&N_{i\xi} = (\boldsymbol{N}_i)_\xi \\
&E_\xi = (\boldsymbol{E})_\xi \\
&r_\xi = (\nabla \times \boldsymbol{E})_\xi \\
&r_{n\xi} = (\nabla \times \boldsymbol{N}_i)_\xi \\
&\qquad (\xi = x, y, z)
\end{aligned} \tag{10}
$$

上述の周波数領域の弱形式を時間領域に変換する。

● $\frac{1}{s_x}u$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s_x}u &= \frac{1}{1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}} u \\
&= \left( 1 - \frac{1}{1 + j\omega \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\sigma_x}} \right) u
\end{aligned} \tag{11}
$$

変換公式

$$
\frac{1}{1 + j\omega X} \leftrightarrow \frac{1}{X} e^{-\frac{t}{X}} \overline{u}(t) \tag{12}
$$

$$
1 \leftrightarrow \delta(t) \tag{13}
$$

を使用すると

$$
\frac{1}{s_x}u \Rightarrow \left( \delta(t) - \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}t} \overline{u}(t) \right) \bigstar\, u(t) \tag{14}
$$

ここで、$\overline{u}(t)$: uint step function、$\bigstar$: temporal convolution である。
または、

$$
\frac{1}{s_x}u \Rightarrow u - \psi_x \tag{15}
$$

$$
\psi_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}t} \overline{u}(t) \bigstar\, u(t) \tag{16}
$$

● $s_x u$

$$
s_x u = \left( 1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \right) u \tag{17}
$$

$$
\Rightarrow u + \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r} \int u dt \tag{18}
$$

または、

$$s_x u \Rightarrow u + v_x \tag{19}$$

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int u dt$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} u \tag{20}$$

● $\omega^2 \frac{1}{s_x} u$

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{1}{s_x} u &\Rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - \psi_x) \\ &= -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{21}$$

● $\omega^2 s_x u$

$$\omega^2 s_x u = \omega^2 \left(1 + \frac{\sigma_x}{j\omega \epsilon_0 \epsilon_r}\right) u$$

$$= \omega^2 u - j\omega \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} u \tag{22}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\partial u}{\partial t} \tag{23}$$

これらを用いると各項は次のように表すことができる。

$$\nabla \times \boldsymbol{N}_i \cdot \mu_r^{-1} \Lambda \nabla \times \boldsymbol{E}$$

$$= r_{nx} \mu_r^{-1} s_x r_x + r_{ny} \mu_r^{-1} \frac{1}{s_x} r_y + r_{nz} \mu_r^{-1} \frac{1}{s_x} r_z \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

$$\bullet\ s_x r_x \Rightarrow r_x + v_{x,r_x} \tag{26}$$

$$\frac{\partial v_{x,r_x}}{\partial t} = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} r_x \tag{27}$$

$$\bullet \frac{1}{s_x} r_y \Rightarrow r_y - \psi_{x,r_y} \tag{28}$$

$$\psi_{x,r_y} = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} t} \overline{u}(t) \bigstar r_y(t) \tag{29}$$

$$\bullet \frac{1}{s_x} r_z \Rightarrow r_z - \psi_{x,r_z} \tag{30}$$

$$\psi_{x,r_z} = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} t} \overline{u}(t) \bigstar r_z(t) \tag{31}$$

$$\boldsymbol{N}_i \cdot \epsilon_r \Lambda \boldsymbol{E}$$

$$= N_{ix} \epsilon_r \frac{1}{s_x} E_x + N_{iy} \epsilon_r s_x E_y + N_{iz} \epsilon_r s_x E_z \tag{32}$$

$$\bullet\omega^2\frac{1}{s_x}E_x \Rightarrow -\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2} \tag{33}$$

$$\bullet\omega^2 s_x E_y \Rightarrow -\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}\frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{34}$$

$$\bullet\omega^2 s_x E_z \Rightarrow -\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{35}$$

領域を四面体辺要素に分割し、

$$\boldsymbol{E}=\sum_j E_j \boldsymbol{N}_j \tag{36}$$

と補間すると、最終的に解く方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&[K_{xx}]\{E\}+[K_{xx}]\{v_x\}+[K_{yy}]\{E\}-[K_{yy}]+[K_{zz}]\{E\}-[K_{zz}]\{\psi_x\}+\\
&\quad [M_{xx}]\frac{\partial^2\{E\}}{\partial t^2}-[M_{xx}]\frac{\partial^2\{\psi_x\}}{\partial t^2}+[M_{yy}]\frac{\partial^2\{E\}}{\partial t^2}+[M_{\sigma yy}]\frac{\partial\{E\}}{\partial t}+[M_{zz}]\frac{\partial^2\{E\}}{\partial t^2}+[M_{\sigma zz}]\frac{\partial\{E\}}{\partial t}\\
&\quad =\{f\}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$[K_{\xi\xi}]_{ij}=\int_V(\nabla\times\boldsymbol{N}_i)_\xi\mu_r^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{N}_j)_\xi dV \tag{38}$$

$$[M_{\xi\xi}]_{ij}=\int_V\frac{1}{c_0^2}(\boldsymbol{N}_i)_\xi\epsilon_r(\boldsymbol{N}_j)_\xi dV \tag{39}$$

$$[M_{\sigma\xi\xi}]_{ij}=\int_V\frac{1}{c_0^2}(\boldsymbol{N}_i)_\xi\epsilon_r\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}(\boldsymbol{N}_j)_\xi dV \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\{f\}_i &= -\int_S \boldsymbol{N}_i\cdot(\boldsymbol{n}\times\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})dS\\
&= -\mu_0\int_S \boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{a}_z\times\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}dS\\
&\quad (\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{a}_z)\\
&= -2\mu_0\int_S \boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{a}_z\times\frac{\partial\boldsymbol{H}_{inc}}{\partial t}dS
\end{aligned} \tag{41}$$

$\{f\}$ は入射面に関する面積分である。

$\{f\}_i$ において、

$$\boldsymbol{a}_z\times\frac{\partial\boldsymbol{H}_{inc}}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_0\mu_r}\boldsymbol{a}_z\times\Big\{\nabla_t E_{zinc}\times\boldsymbol{a}_z-\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{E}_{tinc}\times\boldsymbol{a}_z)\Big\} \tag{42}$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\Big[\Big(-\frac{1}{\mu_0\mu_r}\Big)\boldsymbol{a}_z\times\Big\{\nabla_t E_{zinc}\times\boldsymbol{a}_z+j\beta(\boldsymbol{E}_{tinc}\times\boldsymbol{a}_z)\Big\}\Big] \tag{43}$$

$\mathcal{F}^{-1}$ はフーリエ逆変換を示す。

これを $\{f\}_i$ の式に代入すると、

$$\begin{aligned}\{f\}_i &= \mathcal{F}^{-1}\Big[-2\mu_0\Big(-\frac{1}{\mu_0\mu_r}\Big)\Big([S_{tz}]\{E_z\}_{inc}+j\beta[R_{tt}]\{E_t\}_{inc}\Big)\Big]\\ &= \mathcal{F}^{-1}\Big[R+jI\Big]\\ &= \mathcal{F}^{-1}\Big[R+j\omega\frac{1}{\omega}I\Big]\\ &= Rf(t)+\frac{1}{\omega}I\frac{\partial f(t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{44}$$

ただし、$f(t)$ はガウシアンパルスの時間関数であり、

$$[S_{tz}] = \int_S \boldsymbol{N}_{ti}\times\boldsymbol{a}_z\cdot\mu_r^{-1}\nabla_t N_j\times\boldsymbol{a}_z dS \tag{45}$$

$$[R_{tt}] = \int_S \boldsymbol{N}_{ti}\times\boldsymbol{a}_z\cdot\mu_r^{-1}\boldsymbol{N}_{tj}\times\boldsymbol{a}_z dS \tag{46}$$

である。

## 3　$\psi_x$、$\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}$ と $v_x$ の計算方法

　定式化にはベクトルの各成分 u 以外に $\psi_x$、$\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}$ と $v_x$ が現れるが、以下の関係式を使って逐次更新する。$\Delta t$ は時間刻み幅、$n+1$ はこれから解こうとしている時刻でその値は未知、$n$、$n-1$、$n-2$ はすでに計算した時刻でその値は既知である。
$\psi_x$、$\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}$ と $v_x$ のどちらも漸化式を使えば 2 つ前の値を使って 1 つ前の値を求めることができる。
どの変数も隣接する要素間で不連続であるため、要素毎に要素内節点値を計算する必要がある。

● $\psi_x$

$$\psi_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t)\bigstar u(t) \tag{47}$$

次の関係式が導ける。

$$\psi_x^n = e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}\Delta t}\psi_x^{n-1}+\Big(1-e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}\Delta t}\Big)u^n \tag{48}$$

● $\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2}(\psi_x^n-2\psi_x^{n-1}+\psi_x^{n-2}) \tag{49}$$

● $v_x$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} u \tag{50}$$

次の関係式が導ける。

$$v_x^n = v_x^{n-1} + \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Delta t \ u^n \tag{51}$$

## 4　まとめ

3 次元電磁導波路の不連続問題を PML を用いた時間領域 FEM で定式化した。

## 5　参考文献


[1] Dan Jiao, Jian-Ming Jin, Eric Michielssen, and Douglas J. Riley, "Time-domain finite-element simulation of three-dimensional scattering and radiation problems using perfectly matched layers." https://engineering.purdue.edu/~djiao/publications/DanJiao_pml3d.pdf, IEEE Transactions on Antennas and Propagation vol. 51, no. 2, February 2003