

Frequency Domain FEM Analysis of Three Dimensional Electro-magnetic Waveguide Discontinuity Problems Using Perfectly Matched Layers (PML)

ryujimiya

2024年10月06日

1 はじめに

3次元電磁導波路 (three dimensional electro-magnetic waveguide) の不連続問題 (discontinuity problem) を完全整合層 (Perfectly Matched Layers, PML) を用いて周波数領域で解く。

2 弱形式

図のような x 方向 PML を装荷した導波路不連続問題を考える。

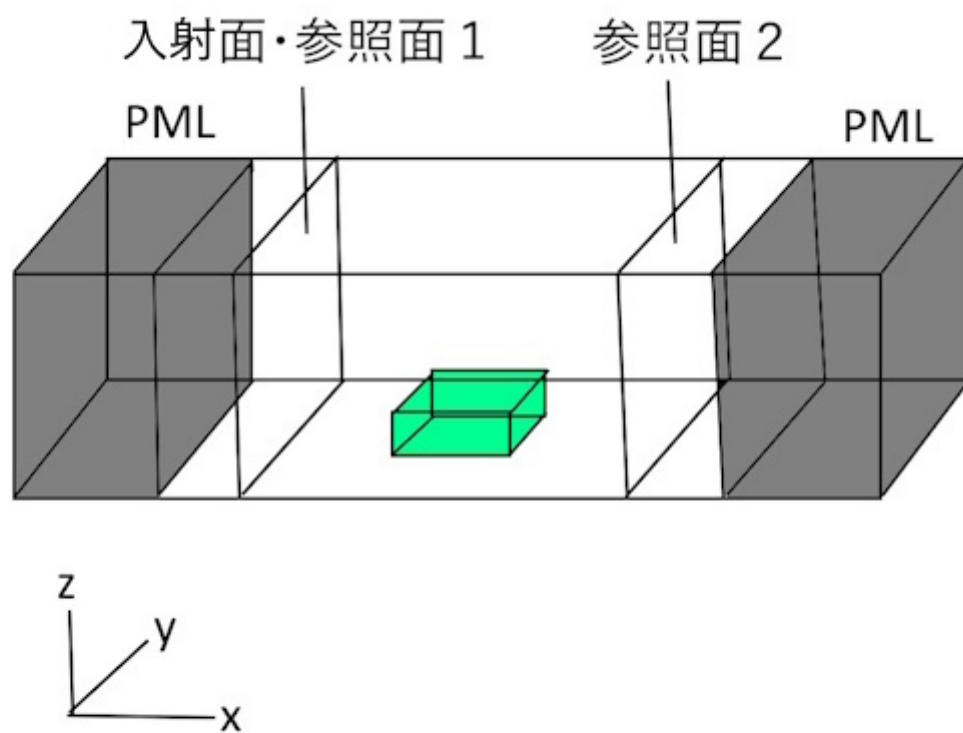


图 1 discontinuity with PML

PML 領域も含めた領域全体の電界 \mathbf{E} に関する波動方程式は、

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \Lambda^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \epsilon_r \Lambda \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ は真空中の波数、 ω は角周波数であり、 μ_0 : 真空中の透磁率、 ϵ_0 : 真空中の誘電率、 μ_r : 媒質の比透磁率、 ϵ_r : 媒質の比誘電率である。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & & \\ & s_x & \\ & & s_x \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} s_x & & \\ & \frac{1}{s_x} & \\ & & \frac{1}{s_x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$s_x = 1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \quad (4)$$

ここで σ_x は x 方向 PML の導電率であり、

$$\sigma_x = \sigma_{xmax} \left(\frac{|x - x_0|}{l_{\text{PML}}} \right)^2 \quad (5)$$

$$\sigma_{xmax} = \frac{3}{2l_{\text{PML}}} \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \ln \left(\frac{1}{R_0} \right) \quad (6)$$

x_0 : PML の始点 (内部領域との境界) の X 座標

l_{PML} : PML の厚さ

R_0 : PML の外へと垂直入射したときの反射係数を意味する小さい数 (あらかじめ指定する値) である。

ガラーキン法を適用する。「Frequency Domain FEM Analysis of Three Dimensional Electro-magnetic Waveguide Discontinuity Problems」を参照。弱形式は、

$$\begin{aligned} & \int_V \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \mu_r^{-1} \Lambda^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \mathbf{N}_i \cdot \epsilon_r \Lambda \mathbf{E} dV \\ & + \int_S \mathbf{N}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mu_r^{-1} \Lambda^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dS = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

体積分の各項は次のように計算する。

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \mu_r^{-1} \Lambda \nabla \times \mathbf{E} \\
&= \begin{bmatrix} r_{nx} \\ r_{ny} \\ r_{nz} \end{bmatrix}^T \mu_r^{-1} \begin{bmatrix} s_x & & \\ & \frac{1}{s_x} & \\ & & \frac{1}{s_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mu_r^{-1} s_x r_x \\ \mu_r^{-1} \frac{1}{s_x} r_y \\ \mu_r^{-1} \frac{1}{s_x} r_z \end{bmatrix} \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{N}_i \cdot \epsilon_r \Lambda \mathbf{E} \\
&= \begin{bmatrix} N_{ix} \\ N_{iy} \\ N_{iz} \end{bmatrix}^T \epsilon_r \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & & \\ & s_x & \\ & & s_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_{ix} \epsilon_r \frac{1}{s_x} E_x \\ N_{iy} \epsilon_r s_x E_y \\ N_{iz} \epsilon_r s_x E_z \end{bmatrix} \tag{9}
\end{aligned}$$

ここにおいて、

$$\begin{aligned}
N_{i\xi} &= (\mathbf{N}_i)_\xi \\
E_\xi &= (\mathbf{E})_\xi \\
r_\xi &= (\nabla \times \mathbf{E})_\xi \\
r_{n\xi} &= (\nabla \times \mathbf{N}_i)_\xi \\
& \quad (\xi = x, y, z) \tag{10}
\end{aligned}$$

領域を四面体辺要素に分割し、

$$\mathbf{E} = \sum_j E_j \mathbf{N}_j \tag{11}$$

と補間すると、

$$[K]\{E\} - k_0^2 [M]\{E\} = \{f\} \tag{12}$$

$$[K]_{ij} = \int_V \nabla \times \mathbf{N}_i \cdot \mu_r^{-1} \Lambda^{-1} \nabla \times \mathbf{N}_j dV \tag{13}$$

$$[M]_{ij} = \int_V \mathbf{N}_i \cdot \epsilon_r \Lambda \mathbf{N}_j dV \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\{f\}_i &= - \int_S \mathbf{N}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) dS \\
&= -j\omega\mu_0 \int_S \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{a}_z \times \mathbf{H} dS \\
&\quad (\mathbf{n} = -\mathbf{a}_z) \\
&= -j\omega\mu_0 2 \int_S \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{a}_z \times \mathbf{H}_{inc} dS \\
&= -j\omega\mu_0 2 \left[-\frac{1}{j\omega\mu_0} \left([S_{tz}] \{E_z\}_{inc} + j\beta [R_{tt}] \{E_t\}_{inc} \right) \right] \tag{15}
\end{aligned}$$

ただし、

$$[S_{tz}] = \int_S \mathbf{N}_{ti} \times \mathbf{a}_z \cdot \mu_r^{-1} \nabla_t N_j \times \mathbf{a}_z dS \tag{16}$$

$$[R_{tt}] = \int_S \mathbf{N}_{ti} \times \mathbf{a}_z \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{N}_{tj} \times \mathbf{a}_z dS \tag{17}$$

これら行列は「Calculations Of Full-wave Eigenmodes Of Waveguides by Edge Element FEM」参照、固有モードを求めるときに作成する行列である。

$\{f\}$ は入射面に関する面積分である。

3 まとめ

3次元電磁導波路の不連続問題を PML を用いた FEM で定式化した。

4 参考文献

- [1] Dan Jiao, Jian-Ming Jin, Eric Michielssen, and Douglas J. Riley, "Time-domain finite-element simulation of three-dimensional scattering and radiation problems using perfectly matched layers." https://engineering.purdue.edu/~djiao/publications/DanJiao_pml3d.pdf, IEEE Transactions on Antennas and Propagation vol. 51, no. 2, February 2003