Vorticity Equations of Navier-Stokes Equations
- Standard Galerkin and SUPG Formulations -

ryujimiya

2020 年 02 月 16 日

1　はじめに

Navier-Stokes の方程式を変形して Vorticity Equations (vorticity:対流) とその弱形式を導出する。
vorticity を用いる方法は境界条件が複雑なので注意しないといけないことが分かった。
連立方程式を解く方法としては、Newmark β 法で解く方法と、分離型の RK4(4 次 Runge-Kutta) で解く方法の 2 つを示す。
Newmark β 法で解く方法は、kinematic viscosity ν が小さい場合に対応するため SUPG(streamline upwind Petrov-Galerkin) 定式化もあわせて行う。

2　Vorticity Equations

非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}} - \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \nabla p = \rho\boldsymbol{g} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{2}$$

(1) 式の両辺の rot をとって、

$$\nabla\times(\rho\dot{\boldsymbol{v}}) - \mu\nabla\times\left(\nabla^2\boldsymbol{v}\right) + \nabla\times(\rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}) + \nabla\times\nabla p = \nabla\times(\rho\boldsymbol{g}) \tag{3}$$

ベクトル公式

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right) - \boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v}) = -\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \{(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\nabla\}\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{v} = \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) - \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}$$

(3) 式の第 2 項

$$-\mu\nabla\times\left(\nabla^2\boldsymbol{v}\right) = \mu\nabla\times\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}$$

((2) 式： $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ を用いた)

(3) 式の第 3 項

$$
\begin{aligned}
\rho\nabla\times(\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}) &= \rho\nabla\times\left\{\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)-\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v}\right\}\\
&= \rho\left\{-\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v})\right\}\\
&\qquad (\phi=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\text{ とみなして、ベクトル公式 }\nabla\times\phi=0\text{ を用いた。})\\
&= -\rho\left[\left\{(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\nabla\right\}\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\nabla\times\boldsymbol{v})\right]
\end{aligned}
$$

(3) の第 4 項

$$\nabla\times\nabla p=0$$

以上を (3) 式に代入すると、

$$p\nabla\times\dot{\boldsymbol{v}}+\mu\nabla\times\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}-\rho\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v})=\rho\nabla\times\boldsymbol{g} \tag{4}$$

vorticity$\boldsymbol{\omega}$ を、

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v} \tag{5}$$

と定義すると、(4) 式は、

$$\rho\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\omega}-\rho\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})=\rho\nabla\times\boldsymbol{g} \tag{6}$$

$$\rho\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\omega}-\rho(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}=\rho\nabla\times\boldsymbol{g} \tag{7}$$

$\boldsymbol{\omega}$ はベクトル公式

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$$

より、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=0 \tag{8}$$

である。
(7) 式の第 2 項

$$
\begin{aligned}
\mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\omega} &= \mu\left\{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})-\nabla^2\boldsymbol{\omega}\right\}\\
&= \mu\left\{-\nabla^2\boldsymbol{\omega}\right\}\\
&\qquad ((8)\text{ 式 }\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=0\text{ を用いた})
\end{aligned}
$$

を (7) 式に代入すると、

$$\rho\dot{\boldsymbol{\omega}}-\mu\nabla^2\boldsymbol{\omega}-\rho(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}=\rho\nabla\times\boldsymbol{g} \tag{9}$$

2 次元問題の場合、

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla=0\\
(\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_3,\quad \frac{\partial}{\partial x_3}=0)
\end{gathered}
$$

であるから、

$$\rho\dot{\boldsymbol{\omega}} - \mu\nabla^2\boldsymbol{\omega} + \rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega} = \rho\nabla\times\boldsymbol{g} \tag{10}$$

以上まとめると、Vorticty Equation (2D) は、

$$\begin{align}
\rho\dot{\boldsymbol{\omega}} - \mu\nabla^2\boldsymbol{\omega} + \rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega} &= \rho\nabla\times\boldsymbol{g} \tag{11}\\
\boldsymbol{\omega} &= \nabla\times\boldsymbol{v} \nonumber\\
&= \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_3 \tag{12}\\
\nabla\cdot\boldsymbol{\omega} &= 0 \tag{13}
\end{align}$$

$\boldsymbol{v}$ は、(2) 式 $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ より、solenoidal なので、

$$\begin{align}
\boldsymbol{\psi} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{bmatrix} \tag{14}\\
\boldsymbol{v} &= \nabla\times\boldsymbol{\psi} \nonumber\\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{15}
\end{align}$$

なるベクトル $\boldsymbol{\psi}$ が存在する。$\boldsymbol{\psi}$ を stream function と呼ぶ。
(15) 式を (12) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\psi}\\
&= \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}\right) - \nabla^2\boldsymbol{\psi}\\
&= -\nabla^2\boldsymbol{\psi}
\end{aligned}$$

ただし 2D の場合、

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{\psi} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{bmatrix}\\
&= 0
\end{aligned}$$

であることを用いた。
したがって、

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{16}$$

(11) 式と (16) 式を連立して解く。

$$\begin{aligned}
\rho\dot{\boldsymbol{\omega}} - \mu\nabla^2\boldsymbol{\omega} + \rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega} &= \rho\nabla\times\boldsymbol{g} && \text{(11) 式}\\
\nabla^2\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\omega} &= 0 && \text{(16) 式}
\end{aligned}$$

(12) 式、(14) 式より、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \omega \boldsymbol{e}_3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi} &= \psi \boldsymbol{e}_3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

と置けるので、スカラーの ω、ψ を使って表すことができる。
(11) 式、(16) 式は、

$$\rho\dot{\omega} - \mu\nabla^2\omega + \rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\omega = \rho\left(\nabla\times\boldsymbol{g}\right)_3 \tag{19}$$

$$(\text{なお、}\left(\nabla\times\boldsymbol{g}\right)_3 = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2})$$

$$\nabla^2\psi + \omega = 0 \tag{20}$$

また、

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ v_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{22}$$

3　Vorticity Equations の弱形式

$$\rho\dot{\omega} - \mu\nabla^2\omega + \rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right)\omega = \rho\left(\nabla\times\boldsymbol{g}\right)_3 \qquad \text{(19) 式}$$

$$\nabla^2\psi + \omega = 0 \qquad \text{(20) 式}$$

まず (19) 式にテストスカラー $\delta\omega$ を掛けて積分する。

$$\int_V -\mu\delta\omega\nabla^2\omega + \rho\delta\omega\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\omega + \rho\delta\omega\dot{\omega}dV = \int_V \delta\omega\left(\nabla\times\boldsymbol{g}\right)_3 dV \tag{23}$$

ここで、

$$\begin{aligned} -\mu\delta\omega\nabla^2\omega &= -\mu\delta\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial x_k^2} \\ &= -\mu\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\delta\omega\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial\delta\omega}{\partial x_k}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right\} \\ &= -\mu\left\{\underline{\nabla\cdot\left(\delta\omega\nabla\omega\right)} - \nabla\delta\omega\cdot\nabla\omega\right\} \end{aligned} \tag{24}$$

(24) 式の右辺第 1 項は自然境界条件として 0 とおいたものを (23) 式に代入すると、

$$\int_V \mu\nabla\delta\omega\cdot\nabla\omega+\rho\delta\omega\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\omega+\rho\delta\omega\dot{\omega}dV=\int_V \delta\omega\left(\nabla\times\boldsymbol{g}\right)_3 dV \tag{25}$$

次に (20) 式にテストスカラー $\delta\psi$ を掛けて積分する。

$$\int_V \delta\psi\nabla^2\psi+\delta\psi\omega dV=0 \tag{26}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\delta\psi\nabla^2\psi&=\delta\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k^2}\\&=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\\&=\underline{\nabla\cdot\left(\delta\psi\nabla\psi\right)}-\nabla\delta\psi\cdot\nabla\psi\end{aligned} \tag{27}$$

(27) 式の右辺第 1 項は自然境界条件として 0 とおいたものを (26) 式に代入し -1 倍して

$$\int_V \nabla\delta\psi\cdot\nabla\psi-\delta\psi\omega dV=0 \tag{28}$$

まとめると、

$$\int_V \mu\nabla\delta\omega\cdot\nabla\omega+\rho\delta\omega\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\omega+\rho\delta\omega\dot{\omega}dV=\int_V \delta\omega\left(\nabla\times\boldsymbol{g}\right)_3 dV \qquad \text{(25) 式}$$
$$\int_V \nabla\delta\psi\cdot\nabla\psi-\delta\psi\omega dV=0 \qquad \text{(28) 式}$$

【自然境界条件】

(24) 式の右辺第 1 項の体積積分は、

$$\int_V -\mu\nabla\cdot\left(\delta\omega\nabla\omega\right)dV=\int_S -\mu\delta\omega\boldsymbol{n}\cdot\nabla\omega dS \tag{29}$$

(27) 式の右辺第 1 項の体積積分は (28) 式で -1 倍しているので、

$$-\int_V \nabla\cdot\left(\delta\psi\nabla\psi\right)=-\int_S \delta\psi\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi dS \tag{30}$$

したがって自然境界条件は、

$$-\mu\boldsymbol{n}\cdot\nabla\omega=0 \tag{31}$$
$$-\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi=0 \tag{32}$$

これらの自然境界条件は物理的な境界を表してはいないのでなんらかの境界条件を定式化する必要がある (後述)。

成分表示する。

(25) 式は、

$$\int_V \mu\frac{\partial\delta\omega}{\partial x_k}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}+\rho\delta\omega v_k\frac{\partial\omega}{\partial x_k}+\rho\delta\omega\dot{\omega}dV=\int_V \delta\omega\rho\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}-\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right)dV \tag{33}$$

(28) 式は、

$$\int_V \frac{\partial \delta\psi}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \delta\psi\omega dV = 0 \tag{34}$$

領域 V を三角形要素で分割し、テスト関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \delta\omega &= N^a \delta\omega^a \\ \delta\psi &= M^c \delta\psi^c \end{aligned} \tag{35}$$

ここに、N^a は ω の節点 a における形状関数、M^c は ψ の節点 c における形状関数である。
(33) 式を $\delta\omega^a$ で偏微分すると、
内力ベクトル (左辺)

$$\begin{aligned} \{Q^\omega\}^a &= \frac{\partial}{\partial \delta\omega^a} \\ &= \int_V \mu \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\frac{\partial \omega}{\partial x_k} + \rho N^a v_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} + \rho N^a \dot{\omega} dV \end{aligned} \tag{36}$$

外力ベクトル (右辺)

$$\{F^\omega\}^a = \int_V N^a \rho \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) dV \tag{37}$$

(34) 式を $\delta\psi^c$ で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \{Q^\psi\}^c &= \frac{\partial}{\partial \delta\psi^c} \\ &= \int_V \frac{\partial M^c}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} - M^c \omega dV \end{aligned} \tag{38}$$

物理量 ω、ψ を、

$$\begin{aligned} \omega &= N^b \omega^b \\ \psi &= M^d \psi^d \end{aligned} \tag{39}$$

と補間する。
Picard の線形化を用いれば、

$$\begin{bmatrix} [M^{\omega\omega}]^{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{\omega}\}^b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{\omega\omega}]^{ab} & 0 \\ [K^{\psi\omega}]^{cb} & [K^{\psi\psi}]^{cd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\omega\}^b \\ \{\psi\}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F^\omega\}^a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$[M^{\omega\omega}]^{ab} = \int_V \rho N^a N^b dV \tag{41}$$

$$[K^{\omega\omega}]^{ab} = \int_V \mu \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\frac{\partial N^b}{\partial x_k} + \rho N^a v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k} dV \tag{42}$$

$$[K^{\psi\omega}]^{cb} = -\int_V M^c N^b dV \tag{43}$$

$$[K^{\psi\psi}]^{cd} = \int_V \frac{\partial M^c}{\partial x_k}\frac{\partial M^d}{\partial x_k} dV \tag{44}$$

ただし、v_k は、1 つ前の反復で求めた ψ を使って、

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\
v_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

で定める。これを用いれば (38) 式の第 2 項は、

$$
\begin{aligned}
\{Q^{\omega 2}\}^a &= \int_V \rho N^a v_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \\
&= \int_V \rho N^a \left(v_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) dV \\
&= \int_V \rho N^a \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)
\end{aligned}
\tag{46}
$$

4　壁の境界条件

壁の境界条件は、

$$
\boldsymbol{v} = 0 \tag{47}
$$

であるが、これを vorticity - stream function 定式化ではどう課せばよいかで悩んだ。
まず、stream function ψ は、

$$
\psi = \text{const.} \tag{48}
$$

$$
= 0 \quad (\text{壁が 1 つだけのとき}) \tag{49}
$$

を課せばよい。
vorticity ω は単純ではなさそうだ。
色々調べていくと差分法で用いられている境界条件が目に留まった。

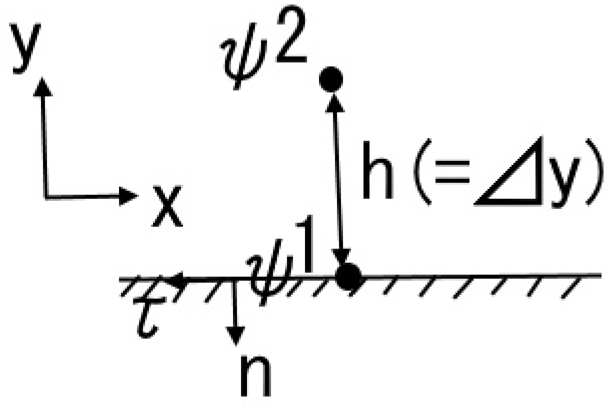

図 1　壁境界

差分法で用いられている境界条件は、Tayor series expansion を用いたもので、壁の上の点を点 1、壁から $h(=\Delta y)$ だけ離れた内部の点を点 2 とすると、

$$\psi^2 = \psi^1 + \frac{\partial \psi^1}{\partial y}h + \frac{\partial^2 \psi^1}{\partial y^2}\frac{h^2}{2} + O(h^3) \tag{50}$$

ここで、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$
$$\psi = \text{const. for } x \text{ on wall}$$

より、

$$\frac{\partial^2 \psi^1}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \psi^1}{\partial y^2} = \omega_{\text{wall}} \tag{51}$$

が得られるので、(50) 式に代入すると、

$$\psi^2 = \psi^1 + \frac{\partial \psi^1}{\partial y}h - \omega_{\text{wall}}\frac{h^2}{2} \tag{52}$$

ω_{wall} について解くと、

$$\omega_{\text{wall}} = \left(\psi^1 - \psi^2\right)\frac{2}{h^2} + \frac{\partial \psi^1}{\partial y}\frac{2}{h} \tag{53}$$

ψ^1 ：wall の ψ で未知、or 既知
ψ^2 ：wall + h(内部) の ψ で未知
$\dfrac{\partial \psi^1}{\partial y}$ ：既知、これは、

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla \psi = v_\tau \tag{54}$$

の関係で、v_τ（壁における速度の接線方向成分）を境界条件として指定するため、計算可能だからである。
以上から、ω に関しての境界条件は、

$$\omega^1 - \left(\psi^1 - \psi^2\right)\frac{2}{h^2} = \frac{\partial \psi^1}{\partial y}\frac{2}{h} \tag{55}$$

or

$$\omega^1 - \left(\psi^1 - \psi^2\right)\frac{2}{h^2} = -\frac{\partial \psi^1}{\partial n}\frac{2}{h} \tag{56}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi^1}{\partial n}\text{を適用した}\right)$$

(56) 式は、節点値の関係式なので FEM の行列の対象の点 1 の row の内容を (56) 式に置き換えることで課すことができる。

(48) 式 $\psi = \text{const.} = 0$ と (56) 式をそれぞれ、ψ と ω の境界条件として lid diriven cavity を解いたら上手く解けた。

(56) 式は壁だけでなく $\boldsymbol{v}$ が v_τ 成分のみの境界にも有効だった (lid driven cavity の壁以外の 1 つの開口境

界)。

Tayor 展開を 3 次の項まで考慮すると、

$$\psi^2 = \psi^1 + \frac{\partial \psi^1}{\partial y} h + \frac{\partial^2 \psi^1}{\partial y^2}\frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 \psi^1}{\partial y^3}\frac{h^3}{6} \tag{57}$$

$$v_y = 0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

であるから、

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = -\omega^1 \tag{58}$$

(58) 式を (57) 式に代入すると、

$$\psi^2 = \psi^1 + \frac{\partial \psi^1}{\partial y} h - \omega^1 \frac{h^2}{2} - \frac{\partial \omega^1}{\partial y}\frac{h^3}{6} \tag{59}$$

ここで、

$$\frac{\partial \omega^1}{\partial y} = \frac{\omega^2 - \omega^1}{h} \tag{60}$$

で近似すると、

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \psi^1 + \frac{\partial \psi^1}{\partial y} h - \omega^1 \frac{h^2}{2} - \left(\omega^2 - \omega^1\right)\frac{h^2}{6} \\ &= \psi^1 + \frac{\partial \psi^1}{\partial y} h - \left(3\omega^1 + \omega^2 - \omega^1\right)\frac{h^2}{6} \\ &= \psi^1 + \frac{\partial \psi^1}{\partial y} h - \left(2\omega^1 + \omega^2\right)\frac{h^2}{6} && (61) \\ & && (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\omega^1 + \omega^2 &= \left(\psi^1 - \psi^2\right)\frac{6}{h^2} + \frac{\partial \psi^1}{\partial y}\frac{6}{h} \\ \omega^1 + \frac{1}{2}\omega^2 &= \left(\psi^1 - \psi^2\right)\frac{3}{h^2} + \frac{\partial \psi^1}{\partial y}\frac{3}{h} && (63) \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial \psi^1}{\partial y}$ だけを既知とするので、

$$\omega^1 + \frac{1}{2}\omega^2 - \left(\psi^1 - \psi^2\right)\frac{3}{h^2} = \frac{\partial \psi^1}{\partial y}\frac{3}{h} \tag{64}$$

or

$$\omega^1 + \frac{1}{2}\omega^2 - \left(\psi^1 - \psi^2\right)\frac{3}{h^2} = -\frac{\partial \psi^1}{\partial n}\frac{3}{h} \tag{65}$$

($\dfrac{\partial \psi^1}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi^1}{\partial n}$を適用した)

(65) 式を用いても lid driven cavity は上手く解けた。

5 Back-step の境界条件

B1、B3 の境界条件を求める。
B1、B3 は流線方向の境界なので、

$$\psi = \mathrm{const.}$$

また、

$$v_x = 0$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

である。したがって、

$$\mathrm{B1} \ : \quad \psi = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \tag{66}$$

$$\mathrm{B3} \ : \quad \psi = \overline{\psi}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \tag{67}$$

$$\overline{\psi} = \left. \psi \right|_{\mathrm{B4}} (y_2) \tag{68}$$

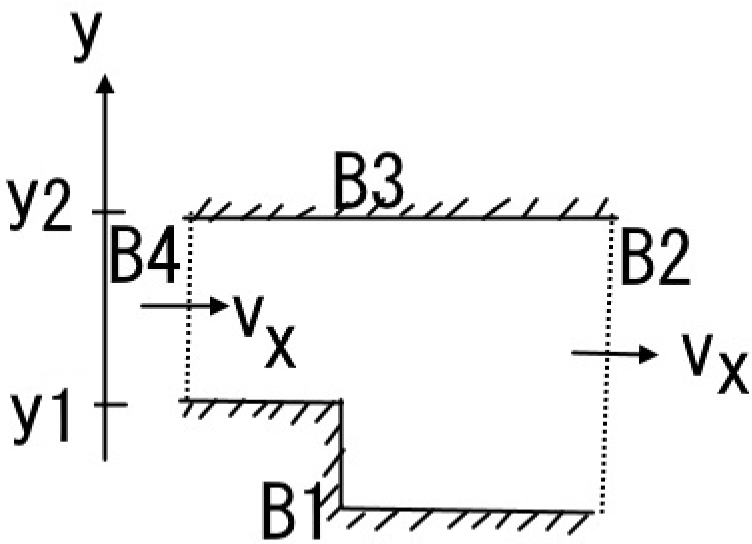

図 2　Back-step

【Inflow の境界条件】

$$
\begin{aligned}
v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\
\psi &= -\int v_y dx \\
&= -\int v_n d\tau \\
&= \psi(\tau) \qquad (69) \\
\omega &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v_y}{\partial x} \\
&\quad (v_x = 0 \text{ を用いた}) \\
&= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\
&= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \\
&= \omega(\tau) \qquad (70)
\end{aligned}
$$

Inflow の流入速度 v_y の分布が分かれば、(69) 式より ψ の分布 $\psi(\tau)$(or $\psi(x)$) が求められる。
また、(70) 式より v_y の分布が分かれば ω の分布 $\omega(\tau)$(or $\omega(x)$) が求められる。
Inflow 境界では (69) 式、(70) 式を式を Dirichlet 境界条件として適用することで Back-step の問題を解くことができた。

【Const. Inflow】

$$
\begin{aligned}
v_x(y) &= \text{const.} \\
&= \overline{v}_x \qquad (71) \\
v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y}
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
\psi(y) &= \int v_x dy \\
&= \int \overline{v}_x dy \\
&= \overline{v}_x y + C \qquad (72)
\end{aligned}
$$

$y = y_1$ のとき $\psi = 0$ となるように C を定めると、

$$
C = -\overline{v}_x y_1 \qquad (73)
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
\psi(y) &= \overline{v}_x\left(y-y_1\right) \qquad (74)\\
\omega(y) &= \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\\
&= -\frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad (75)\\
&\quad (v_y=0\ \text{を用いた。})\\
&= -\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y}\\
&= 0 \qquad (76)
\end{aligned}
$$

【Parabolic Inflow】

$$
\begin{aligned}
v_x(y) &= -A\left(y-y_1\right)\left(y-y_2\right)\\
&= A\left\{-y^2+\left(y_1+y_2\right)y-y_1y_2\right\} \qquad (77)
\end{aligned}
$$

$$
A=\frac{4}{\left(y_2-y_1\right)^2}v_{x\mathrm{max}} \qquad (78)
$$

$$
\begin{aligned}
\psi(y) &= \int v_x dy\\
&= A\left\{-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}\left(y_1+y_2\right)y^2-y_1y_2y\right\}+C \qquad (79)
\end{aligned}
$$

$y=y_1$ のとき $\psi=0$ となるように C を定めると、

$$
C=-A\left\{-\frac{1}{3}y_1^3+\frac{1}{2}\left(y_1+y_2\right)y_1^2-y_1y_2y_1\right\} \qquad (80)
$$

$$
\begin{aligned}
\omega(y) &= \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\\
&= -\frac{\partial v_x}{\partial y}\\
&\quad (v_y=0\ \text{を用いた})\\
&= -A\left\{-2y+\left(y_1+y_2\right)\right\}\\
&= A\left\{2y-\left(y_1+y_2\right)\right\} \qquad (81)
\end{aligned}
$$

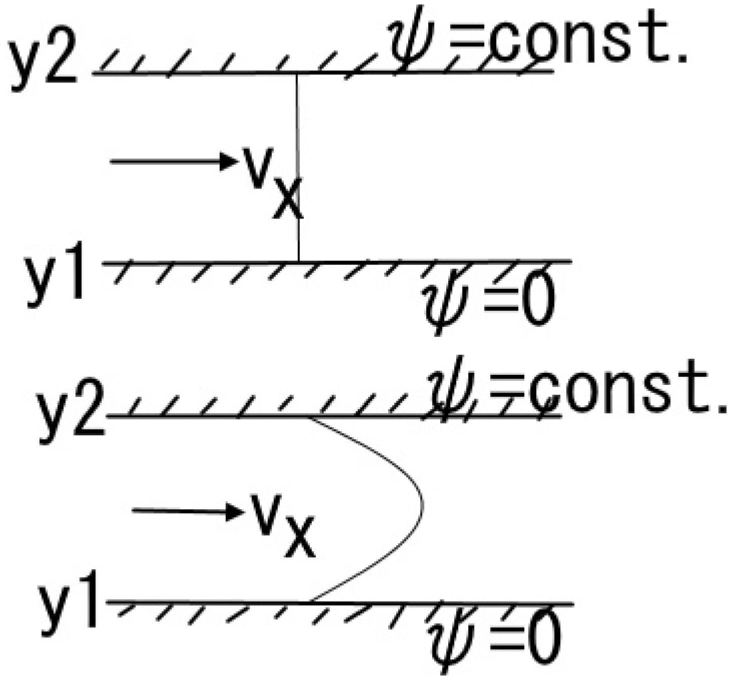

図 3　Const. Inflow and Parabolic Inflow

【Outflowの境界条件】

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$$

or

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \tag{82}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{83}$$

ψ については、

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{84}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 \tag{85}$$

or

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right) = 0$$

まず、ψ の境界条件を求める。
点1、点2を境界上の点(2点間のx方向距離を Δx_1)、点3、点4を点1、点2に対応する境界から Δy の距離の内部の点(2点間のx方向距離を Δx_2)とすると、(85)式より、

$$\frac{1}{\Delta y}\left(\frac{\psi^4 - \psi^3}{\Delta x_2} - \frac{\psi^2 - \psi^1}{\Delta x_1}\right) = 0 \tag{86}$$

$$\frac{\psi^1 - \psi^2}{\Delta x_1} - \frac{\psi^3 - \psi^4}{\Delta x_2} = 0 \tag{87}$$

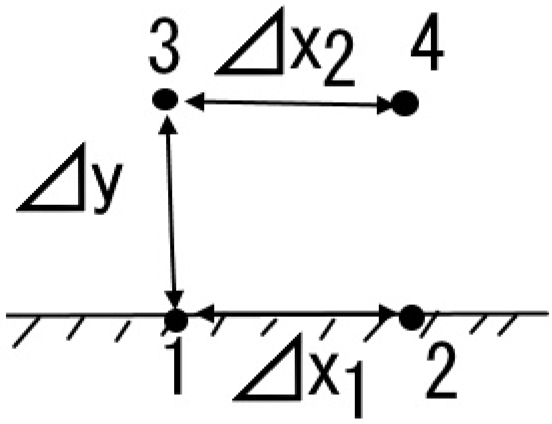

図 4　Outflow ψ

　次に ω の境界条件を求める。
(83) 式を満たす ω を含む式を作る。
点 1、点 2 を境界上の 2 点（2 点間の距離を Δx）とすると、

$$\psi^2 = \psi^1 + \frac{\partial \psi^1}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 \psi^1}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} \tag{88}$$

ここで、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$

で、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

より、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\omega$$

これを代入すると、

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \psi^1 + \frac{\partial \psi^1}{\partial x}\Delta x - \omega^1 \frac{\Delta x^2}{2} \\ \omega^1 &= \left(\psi^1 - \psi^2\right)\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{\partial \psi^1}{\partial x}\frac{2}{\Delta x} \end{aligned} \tag{89}$$

ここで、$\dfrac{\partial \psi^1}{\partial x}$ は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^1}{\partial x} &= -v_y \\ &= v_n \end{aligned} \tag{90}$$

である。

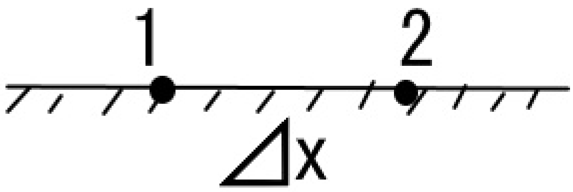

図 5　Outflow ω

(87) 式と (89) 式を Dirichlet 境界条件として適用することで Back-step の問題を解くことができた。

6 分離型 RK4 を用いた Vorticity Equations の解法

(25) 式、(28) 式より、

$$\int_V \rho\delta\omega\dot{\omega}dV = -\int_V \nabla\delta\omega\cdot\nabla\omega + \rho\delta\omega\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\omega dV + \int_V \delta\left(\nabla\times\boldsymbol{g}\right)_3 dV \tag{91}$$

$$\int_V \nabla\delta\psi\cdot\nabla\psi - \delta\psi\omega dV = 0 \tag{92}$$

マトリクス表示すると、

$$[M^\omega]\{\dot{\omega}\} = -[K^\omega]\{\omega\} + \{f\} \tag{93}$$

$$[K^\psi]\{\psi\} + [M^\psi]\{\omega\} = 0 \tag{94}$$

(93) 式を RK4(4 次 Runge-Kutta) で解く。(93) 式は、

$$\{\dot{\omega}\} = [M]^{-1}\left(-[K]\{\omega\} + \{f\}\right) \tag{95}$$

であるから、

$$\{\dot{\omega}\} = f(t,\omega) \tag{96}$$

$$f(t,\omega) = [M]^{-1}\left(-[K]\{\omega\} + \{f\}\right) \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
\{k_1\} &= \Delta t[M]^{-1}\left(-[K]\{\omega^n\} + \{f\}\right)\\
\{k_2\} &= \Delta t[M]^{-1}\left(-[K]\{\omega^n + \frac{k_1}{2}\} + \{f\}\right)\\
\{k_3\} &= \Delta t[M]^{-1}\left(-[K]\{\omega^n + \frac{k_2}{2}\} + \{f\}\right)\\
\{k_4\} &= \Delta t[M]^{-1}\left(-[K]\{\omega^n + k_3\} + \{f\}\right)
\end{aligned} \tag{98}$$

$$\{\omega^{n+1}\} = \{\omega^n\} + \frac{1}{6}\left(\{k_1\} + 2\{k_2\} + 2\{k_3\} + \{k_4\}\right) \tag{99}$$

(98) 式の解き方を示す。

$$\{k\} = \Delta t[M]^{-1}\left(-[K]\{\overline{\omega}\} + \{f\}\right) \tag{100}$$

$$[M]\{k\} = \Delta t\left(-[K]\{\overline{\omega}\} + \{f\}\right) \tag{101}$$

(101) 式の k は ω の境界条件をそのまま適用できない。そこで、

$$[M]\{k + \omega^n\} = [M]\{\omega^n\} + \Delta t\left(-[K]\{\overline{\omega}\} + \{f\}\right)$$

$$[M]\{\overline{\overline{\omega}}\} = [M]\{\omega^n\} + \Delta t\left(-[K]\{\overline{\omega}\} + \{f\}\right) \tag{102}$$

$$\{\overline{\overline{\omega}}\} = \{k\} + \{\omega^n\} \tag{103}$$

$\overline{\overline{\omega}}$ には ω の境界条件を適用できる。

したがって、まず $\overline{\overline{\omega}}$ を求めればよい。そして、

$$\{k\} = \{\overline{\overline{\omega}}\} - \{\omega^n\} \tag{104}$$

より $\{k\}$ を求める。

【アルゴリズム】

Step1: (93) 式より $\{\omega^{n+1}\}$ を求める。(RK4 の (99) 式)

Step2: (94) 式より $\{\psi^{n+1}\}$ を求める。つまり次の方程式を解く。（これは直接法で解ける。）

$$[K]\{\psi^{n+1}\} = -[M]\{\omega^{n+1}\} \tag{105}$$

7 Vorticity Equations SUPG(streamline upwind Petrov-Galerkin)

kinematic viscosity $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ が小さい場合は、SUPG(streamline upwind Petrov-Galerkin) を用いる必要がある。

残差 r_M はスカラー値で、

$$r_M = \rho\dot{\omega} - \mu\nabla^2\omega + \rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\omega - \rho\left(\nabla\times\boldsymbol{g}\right)_3 \tag{106}$$

SUPG(streamline upwind Petrov-Galerkin) 項は、

$$\int_V \frac{1}{\rho}\left(\tau_M\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta\omega\right) r_M dV \tag{107}$$

(107) 式をガラーキン法の弱形式 (25) 式、(28) 式に適用すると、

$$\begin{aligned}&\int_V \mu\nabla\delta\omega\cdot\nabla\omega + \rho\delta\omega\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\omega + \rho\delta\omega\dot{\omega}dV \\ &\qquad + \underline{\int_V \frac{1}{\rho}\left\{\tau_M\rho\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\delta\omega\right\} r_M dV} = \int_V \delta\omega\rho\left(\nabla\times\boldsymbol{g}\right)_3 dV\end{aligned} \tag{108}$$

$$\int_V \nabla\delta\psi\cdot\nabla\psi - \delta\psi\omega dV = 0 \tag{109}$$

内力ベクトル：

(108) 式の SUPG 項は、

$$\frac{1}{\rho}\left(\tau_M\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta\omega\right) r_M = \frac{1}{\rho}\left(\tau_M\rho v_k\frac{\partial\delta\omega}{\partial x_k}\right) r_M \tag{110}$$

であるから、これに対応する内力ベクトルは、

$$
\begin{aligned}
\{Q^{\omega}\}^a &= \frac{\partial}{\partial \delta \omega^a} \\
&= \int_V \frac{1}{\rho} \left(\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k} \right) r_M dV \qquad (111) \\
&= \int_V \frac{1}{\rho} \left\{ \tau_M \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial N^a}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial N^a}{\partial x_2} \right) \right\} r_M dV \qquad (112)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\
v_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \qquad (113)
\end{aligned}
$$

を用いた。
接線剛性行列：
SUPG 項 (111) 式 (or(112) 式) に対応する接線剛性行列は、Picard の線形化を用いれば、

$$
\begin{aligned}
[K^{\omega\omega}]^{ab} &= \frac{\partial \{Q^{\omega}\}^a}{\partial \omega^b} \\
&= \int_V \frac{1}{\rho} \left(\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k} \right) \frac{\partial r_M}{\partial \omega^b} dV \qquad (114) \\
[K^{\omega\psi}]^{ad} &= \frac{\partial \{Q^{\omega}\}^a}{\partial \psi^d} \\
&= \int_V \frac{1}{\rho} \left(\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k} \right) \frac{\partial r_M}{\partial \psi^d} dV \qquad (115)
\end{aligned}
$$

残差 (106) 式は、Picard の線形化を用いれば、

$$
\begin{aligned}
r_M &= \rho \dot{\omega} - \mu \nabla^2 \omega + \rho (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \omega - \rho (\nabla \times \boldsymbol{g})_3 \\
&= \rho \dot{\omega} - \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_k^2} + \rho v_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} - \rho \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \qquad (116) \\
&= \rho \dot{\omega} - \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_k^2} + \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) - \rho \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \qquad (117) \\
\frac{\partial r_M}{\partial \omega^b} &= \rho \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega^b} - \mu \frac{\partial^2 N^b}{\partial x_k^2} + \rho v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \qquad (118) \\
\frac{\partial r_M}{\partial \psi^d} &= 0 \qquad (119)
\end{aligned}
$$

ここで、Newmark β を用いるので、

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= N^b \dot{\omega}^b \\ &= N^b \left\{ \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\left(\omega - \omega^{t-1}\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\omega}^{t-1} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\omega}^{t-1} \right\}\end{aligned} \tag{120}$$

また、

$$\frac{\partial \dot{\omega}^b}{\partial \omega^b} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \tag{121}$$

より、

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega^b} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} N^b \tag{122}$$

$$\{\tilde{Q}^{\omega}\}^a = \int_V \frac{1}{\rho}\left(\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right)\left\{ -\frac{\gamma}{\beta \Delta t}\omega^{t-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\omega}^{t-1} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\omega}^{t-1} - \rho\left(\nabla \times \boldsymbol{g}\right)_3 \right\} \tag{123}$$

とすると、解くべき方程式の SUPG 項の部分は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} [K^{\omega\omega}]^{ab} & [K^{\omega\psi}]^{ad} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\omega\}^b \\ \{\psi\}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\{\tilde{Q}^{\omega}\}^a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{124}$$

SUPG 以外の項は、すでに求めた (40) 式〜(44) 式である。

8 まとめ

Navier-Stokes の方程式を変形して Vorticity Equations の定式化を行った。
vorticity を用いる方法は境界条件が複雑なので注意しないといけないことが分かった。
連立方程式を解く方法としては、Newmark β 法で解く方法と、RK4(4 次 Runge-Kutta) で解く方法の 2 つを試した。
Newmark β 法で解く方法は、kinematic viscosity ν が小さい場合に対応するため SUPG(streamline upwind Petrov-Galerkin) 定式化も行った。

9 参考文献

[1] F. Glaisner and T.E. Tezduyar, ”Finite Element Techniques for the Navier-Stokes Equations in the Primitive Variable Formulation and the Vorticity Stream-function Formulation”, Interim Report for the Work Performed Under NASA-Johnson Space Center, CR-172005, Contract NAS 9-17380, July 1987

[2] Yunhua Xue, Cheng Wang, Jian-Guo Liu, ”Simple Finite Element Numerical Simulation of Incompressible Flow Over Non-rectangular Domains and the Super-Convergence Analysis”, Springer Science+BusinessMedia New York 2015, J Sci Comput (2015) 65:pp.1189 - 1216, ,March 2015