Three Dimensional Two-body Contact By Mortar Method

ryujimiya

2021 年 02 月 02 日

1　はじめに

2 次元の弾性体接触問題はすでに「Two-body Contact By Mortar Method」に記した。本書では 3 次元の接触問題を Mortar Method を用いて解く。

2　Mortar Method

接触の拘束条件は変形後の系の座標で表す。接触される側、すなわち master の体積を v_m、境界面を s_m とする。また、master、slave の接触面の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_m$、$\boldsymbol{x}_s$ とする。slave の点 $\boldsymbol{x}_s$ の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$、接線ベクトルを $\boldsymbol{\tau}_1$、$\boldsymbol{\tau}_2$ とする。

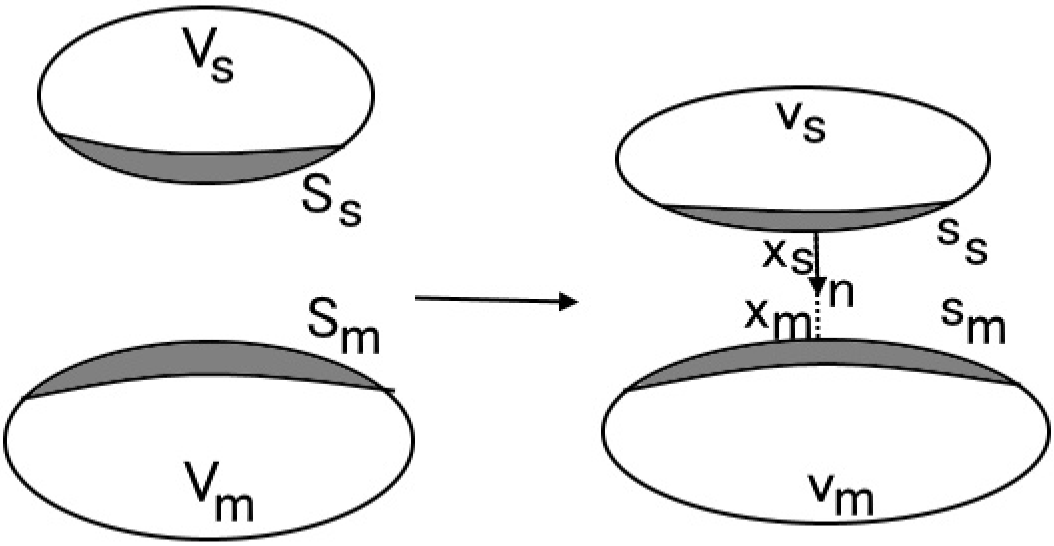

図1　2つの弾性体の接触問題

$$\Phi_c = \int_{s_s} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}_m)\, ds \tag{1}$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_n \boldsymbol{n} + \lambda_{\tau 1} \boldsymbol{\tau}_1 + \lambda_{\tau 2} \boldsymbol{\tau}_2 \tag{2}$$
$$g_n = (\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_s) \cdot \boldsymbol{n} \tag{3}$$

接触の拘束条件は、$\delta\Phi_c$ が 0 となることである。ただし、λ_n, g_n は次の KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker conditions) を満たすものとする。

$$\lambda_n \geq 0 \tag{4}$$
$$g_n \geq 0 \tag{5}$$
$$\lambda_n g_n = 0 \tag{6}$$

また、弱形式によって

$$\lambda_{\tau 1} = 0 \tag{7}$$
$$\lambda_{\tau 2} = 0 \tag{8}$$

を満たすような解を求める。

KKT 条件を課す範囲は図の斜線部分である。

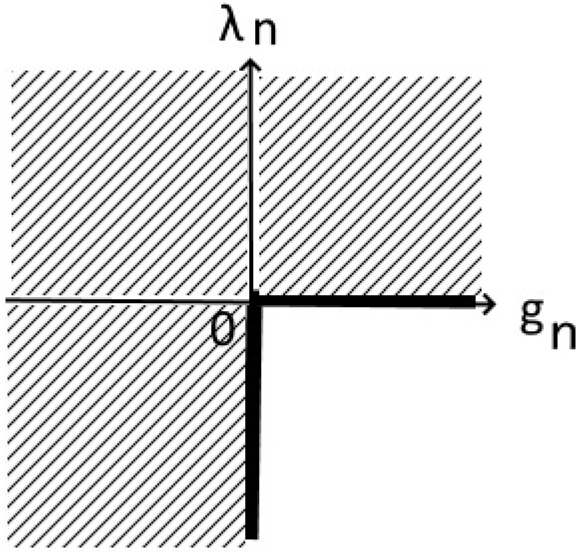

図 2　KKT

$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{\lambda}$ が次のように補間できるとする。

$$u_i = N^a u_i^a \quad (i = x, y, z) \tag{9}$$
$$\lambda_l = M^c \lambda_l^c \quad (l = n, \tau_1, \tau_2) \tag{10}$$

a、c は節点番号である。

拘束条件の変分は、

$$\delta\Phi_c = \int_{s_s} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\delta\boldsymbol{u}_s - \delta\boldsymbol{u}_m)\, ds + \int_{s_s} \delta\boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}_m)\, ds \tag{11}$$

$\delta\Phi_c = 0$ となる解を Newton-Raphson 法で求める。

$$\delta\Phi_c = \{Q\}\{\delta u\} \tag{12}$$
$$\{Q\} = \begin{bmatrix} \{Q^U\}_i^a \\ \{Q^\lambda\}_l^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Phi_c}{\partial u_i^a} \\ \dfrac{\partial\Phi_c}{\partial\lambda_l^c} \end{bmatrix}$$
$$\{\delta u\} = \begin{bmatrix} \delta u_i^a \\ \delta\lambda_l^c \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \{Q^U\}_i^a &= \frac{\partial\Phi_c}{\partial u_i^a} \\ &= \int_{s_s} (\lambda_n n_i + \lambda_{\tau 1}\tau_{1i} + \lambda_{\tau 2}\tau_{2i})(N_s^a - N_m^a)\, ds \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \{Q\}_l^c &= \frac{\partial\Phi_c}{\partial\lambda_l^c} \\ &= \int_{s_s} M^c \boldsymbol{a}_l \cdot (\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}_m) ds \end{aligned} \tag{15}$$

$$(\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{a}_{\tau 1} = \boldsymbol{\tau}_1,\ \boldsymbol{a}_{\tau 2} = \boldsymbol{\tau}_2) \tag{16}$$

接線剛性行列を求める。

$$
\begin{aligned}
[K^{UU}]^{ab}_{ij} &= \frac{\partial \{Q^U\}^a_i}{\partial u^b_j} \\
&= 0 && (17) \\
[K^{U\lambda}]^{ad}_{im} &= \frac{\partial \{Q^U\}^a_i}{\partial \lambda^d_m} \\
&= \int_{s_s} M^d a_{mi} (N^a_s - N^a_m) ds && (18) \\
& && (19) \\
[K^{\lambda U}]^{cb}_{lj} &= \frac{\partial \{Q^\lambda\}^c_l}{\partial u^b_j} \\
&= \int_{s_s} M^c a_{lj} (N^b_s - M^b_m) ds && (20) \\
[K^{\lambda\lambda}]^{cd}_{lm} &= \frac{\partial \{Q^\lambda\}^c_l}{\partial \lambda^d_m} \\
&= 0 && (21)
\end{aligned}
$$

3 Mortar Segments

Mortar Method の積分を計算するとき、slave の点と master の点の対応方法が必要となる。
そこで、連続な法線ベクトルを導入する。
節点 a の法線ベクトルを隣接する要素についての平均値として、

$$
\boldsymbol{n}_a = \frac{\sum_e \boldsymbol{n}^{(e)}_a}{|\sum_e \boldsymbol{n}^{(e)}_a|} \tag{22}
$$

とすると連続な法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は、

$$
\boldsymbol{n} = \sum_a N^a \boldsymbol{n}_a \tag{23}
$$

ただし、$\boldsymbol{n}$ は単位ベクトルでないので注意する。
法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が定まれば残りの 2 つの基底ベクトルは次で定まる。

$$
\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = 0 \tag{24}
$$

$$
\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}_1 \tag{25}
$$

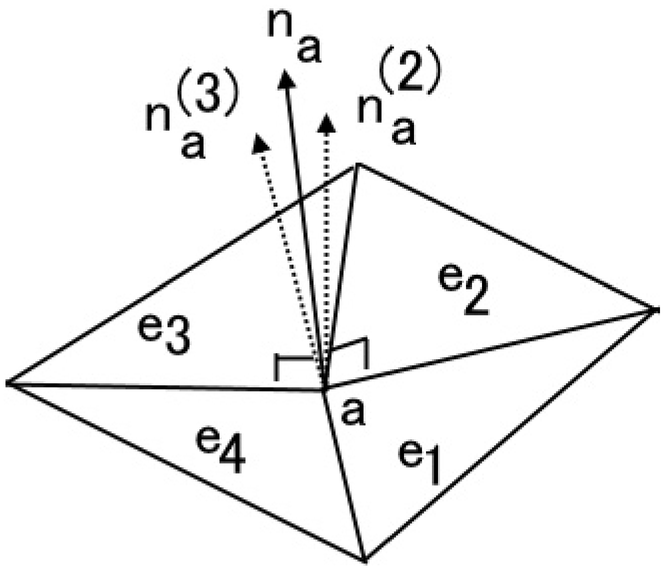

図 3　節点法線ベクトル

mortar segments を生成する方法は次の通り。

次の手順をすべての slave 要素について行う。

1. slave 要素の中心 $\boldsymbol{x}_0^s$ と対応する単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_0$ をもとに補助平面 (auxiliary plane) を構築する。
2. slave 要素の節点 $\boldsymbol{x}_k^s$ を $\boldsymbol{n}_0$ に沿って補助平面に投影する。投影点を $\tilde{\boldsymbol{x}}_k^s$ とする。
3. 全ての master 要素の節点 $\boldsymbol{x}_l^m$ を $\boldsymbol{n}_0$ に沿って補助平面に投影する。投影点を $\tilde{\boldsymbol{x}}_l^m$ とする。
4. 投影された slave と master 要素の重なった多角形 (clip polygon) を求める。
5. clip polygon を三角形で分割し、積分対象のセル (integration cell) を得る。セルは 3 つの頂点 $\tilde{\boldsymbol{x}}_v^{cell}$ $(v = 1, 2, 3)$ をもち、内部の点は三角形形状関数で補間される。
6. セル内の Gauss 積分点 $\tilde{\boldsymbol{x}}_w^{gp}$ $(w = 1, \cdots, n_{gp})$ を求める。$\tilde{\boldsymbol{x}}_w^{gp}$ に対応する slave の点 $\boldsymbol{x}_s$、master の点 $\boldsymbol{x}_m$ を求める。($\tilde{\boldsymbol{x}}_w^{gp}$ から $\boldsymbol{n}_0$ に沿って slave または master に投影することで求まる。) $\boldsymbol{x}_s$、$\boldsymbol{x}_m$ が定まれば、N_s^a、N_m^a、M^c といった形状関数の値および $\boldsymbol{\lambda}$ の値が定まる。
7. すべてのセルについて Gauss 積分を行う。

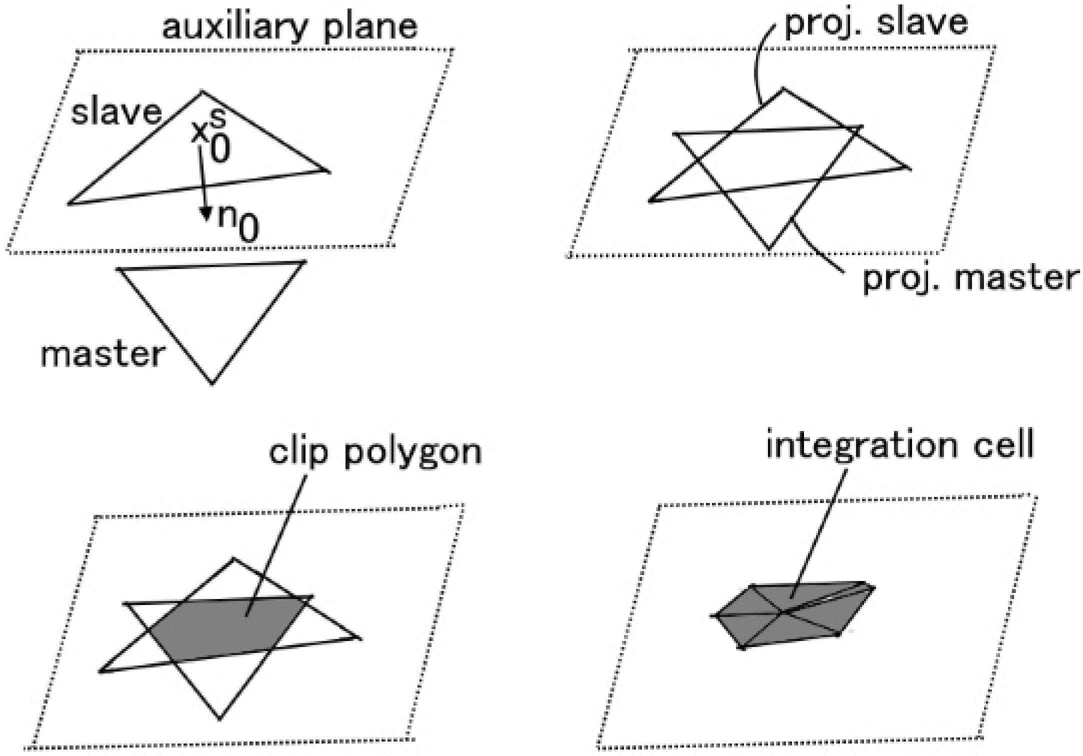

図 4　Mortar Segments

4　まとめ

Mortar Method を用いて 3 次元の接触解析の FEM 定式化を行った。

5　参考文献

[1] Alexander Popp, "Mortar Methods for Computational Contact Mechanics and General Interface Problems", TECHNISCHE UNIVERSITAT MUNCHEN, 2012