

Two-body Contact By Mortar Method

ryujimiya

2020 年 01 月 19 日

1 はじめに

「Ogden Hyperelastic Model Analysis by Total Lagrange FEM」で超弾性体の変位解析の弱形式を求めた。

2つの弾性体の接触問題を解析する場合には、両物体の接触面となる境界に対する接触の拘束条件を弱形式に加える。この接触の拘束条件を Mortar Method を用いて定式化する。

2 Mortar Method

接触の拘束条件は変形後の系の座標で表す。接触される側、すなわち master の体積を v_m 、境界面を s_m とする。また、master、slave の接触面の位置ベクトルを \boldsymbol{x}_m 、 \boldsymbol{x}_s とする。slave の点 \boldsymbol{x}_s の法線ベクトルを \boldsymbol{n} 、接線ベクトルを $\boldsymbol{\tau}$ とする。

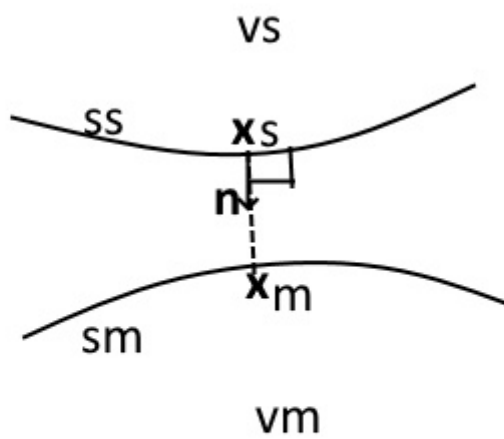
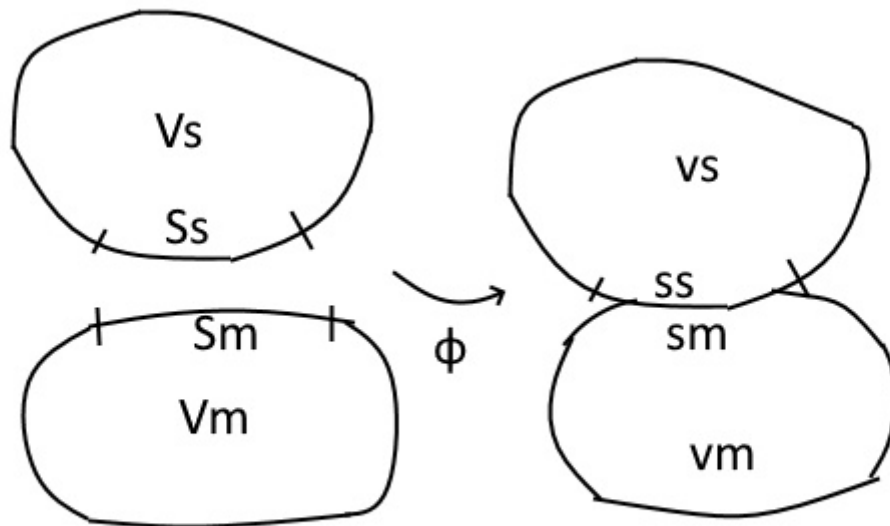


図1 2つの弾性体の接触問題

$$\Phi_c = \int_{s_s} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_m) ds \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_n \mathbf{n} + \lambda_\tau \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

$$g_N = (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n} \quad (3)$$

接触の拘束条件は、 $\delta\Phi_c$ が 0 となることである。ただし、 λ_n, g_N は次の KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker conditions) を満たすものとする。

$$\lambda_n \geq 0 \quad (4)$$

$$g_N \geq 0 \quad (5)$$

$$\lambda_n g_N = 0 \quad (6)$$

また、弱形式によって

$$\lambda_\tau = 0 \quad (7)$$

を満たす。(Mortar Method では λ_τ を 0 と置かないで弱形式で満たすようにする。)

(4) 式～(6) 式について説明する。

$\lambda_n g_N = 0$ は、 λ_n か g_N のどちらかが 0 であることを意味している。

$$\begin{aligned} \lambda_n > 0 \quad \text{なら} \quad g_N &= 0 \\ g_N > 0 \quad \text{なら} \quad \lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

を満たす (図の太線部分)。

拘束条件 (1) 式の適用は次のように行う。 δ, ϵ を十分小さな数とすると、

(1) $\lambda_n > \delta$ なら、 $\lambda_n > 0$ なので拘束条件を入れる。

(2) (1) 以外で $g_N < \epsilon$ なら、 $g_N \geq 0$ が満たされないので、 $g_N = 0$ になるように拘束条件を入れる。

(3) (1)、(2) 以外するとき、つまり $\lambda_n \leq \delta$ かつ $g_N \geq \epsilon$ のときは、 $g_N \geq 0$ が満たされると考え、拘束条件を入れずに、 λ_n を 0 にセットする。

結局図の斜線部分で拘束条件を課す。

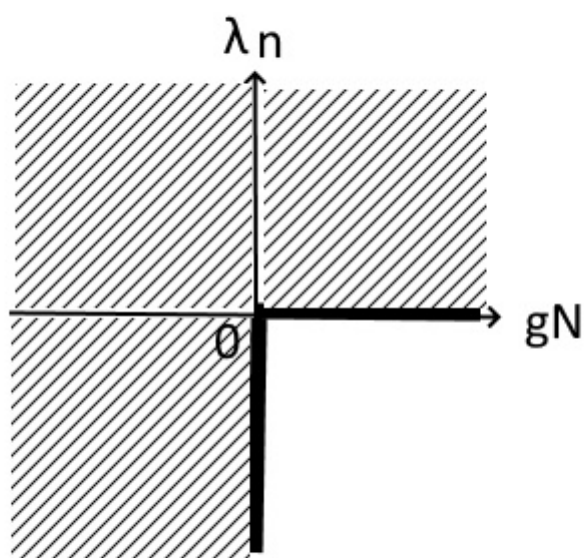


图 2 KKT

\mathbf{u} 、 λ が次のように補間できるとする。

$$u_i = N^p u_i^p \quad (8)$$

$$\lambda_l = M^r \lambda_l^r \quad (9)$$

i は x, y 方向を意味する。 l は n, τ 方向を意味する。

p, r は要素内の節点番号で、全体節点番号 a, c に対応するものとする。

slave から master 方向への法線ベクトル \mathbf{n} は節点で不連続になるが、これだと扱いにくいので、連続な法線ベクトルを導入する。

節点 i が線分 1 と線分 2 の間の節点だとし、線分の長さをそれぞれ l_1, l_2 、法線単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ とすると、節点の平均法線ベクトル $\bar{\mathbf{n}}_i$ は、向かい合う線分の長さを重みにとって、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_i &= \frac{\frac{1}{l_1} \mathbf{n}_1 + \frac{1}{l_2} \mathbf{n}_2}{\left| \frac{1}{l_1} \mathbf{n}_1 + \frac{1}{l_2} \mathbf{n}_2 \right|} \\ &= \frac{l_2 \mathbf{n}_1 + l_1 \mathbf{n}_2}{|l_2 \mathbf{n}_1 + l_1 \mathbf{n}_2|} \end{aligned} \quad (10)$$

この節点法線ベクトル $\bar{\mathbf{n}}_i$ を用いて、連続な法線ベクトル $\bar{\mathbf{n}}$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}} &= \sum_{r=1}^2 L_r \bar{\mathbf{n}}_r \\ &= L_1 \bar{\mathbf{n}}_1 + L_2 \bar{\mathbf{n}}_2 \end{aligned} \quad (11)$$

$L_r (r = 1, 2)$ は線要素の線形補間関数である。 $\bar{\mathbf{n}}$ は単位ベクトルではないので、法線単位ベクトルとして用いるには、 $\frac{\bar{\mathbf{n}}}{|\bar{\mathbf{n}}|}$ を計算する必要がある。

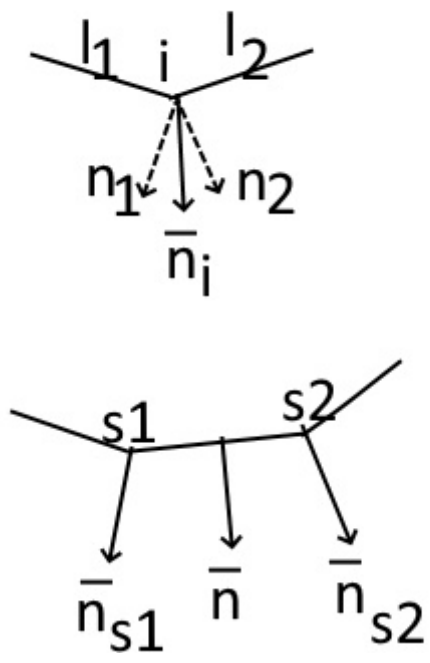


図3 連続な法線ベクトル

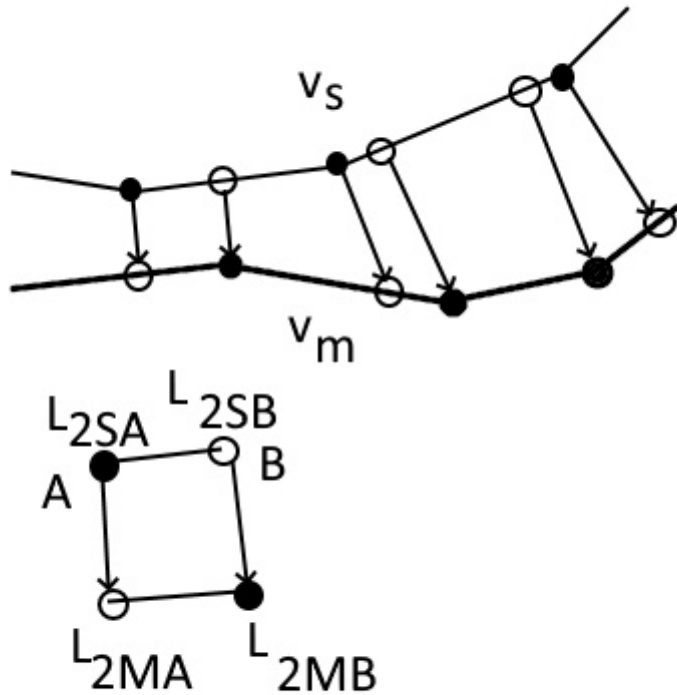


図4 segments

slave の節点 A から法線方向に直線を伸ばして master 表面との交点を求める。また、slave の辺上から法線方向に伸ばした先が master の節点となるような slave 表面の点 B を求める。slave の点 A、B およびそれに対応する master の点によって囲まれた segment ができる。この segment 単位で slave と master の間を分割する。

segment 上の線形補間関数を L_{2s} 、 L_{2m} とすると、

$$L_{2s} = (1 - L_{2AB}) L_{2sA} + L_{2AB} L_{2sB} \quad (N_s, M \text{ に使用する})$$

$$L_{2m} = (1 - L_{2AB}) L_{2mA} + L_{2AB} L_{2mB} \quad (N_m \text{ に使用する})$$

ここに、 L_{2A} 、 L_{2B} は segment の線形補間関数、 L_{2si} 、 L_{2mi} ($i = A, B$) は segment 端での線要素の形状関数である。

拘束条件の変分を計算する。

$$\delta\Phi_c = \int_{s_s} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\delta\mathbf{u}_s - \delta\mathbf{u}_m) ds + \int_{s_s} \delta\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_m) ds \quad (12)$$

$$\delta\Phi_c = \{Q\}\{\delta u\} \quad (13)$$

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} \{Q^U\}_i^a \\ \{Q^\lambda\}_l^c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_c}{\partial u_i^a} \\ \frac{\partial\Phi_c}{\partial \lambda_l^c} \end{bmatrix}$$

$$\{\delta u\} = \begin{bmatrix} \delta u_i^a \\ \delta \lambda_l^c \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \{Q^U\}_i^a &= \frac{\partial\Phi_c}{\partial u_i^a} \\ &= \sum_{seg} \int (\lambda_n n_i + \lambda_\tau \tau_i) \left(N_s^{p'} \delta_{pp'} - N_m^{p''} \delta_{pp''} \right) ds \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \{Q^\lambda\}_l^c &= \frac{\partial\Phi_c}{\partial \lambda_l^c} \\ &= \begin{cases} \sum_{seg} \int M^r \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_m) ds & (l = n \text{ 方向}) \\ \sum_{seg} \int M^r \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_m) ds & (l = \tau \text{ 方向}) \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

接線剛性行列を求める。

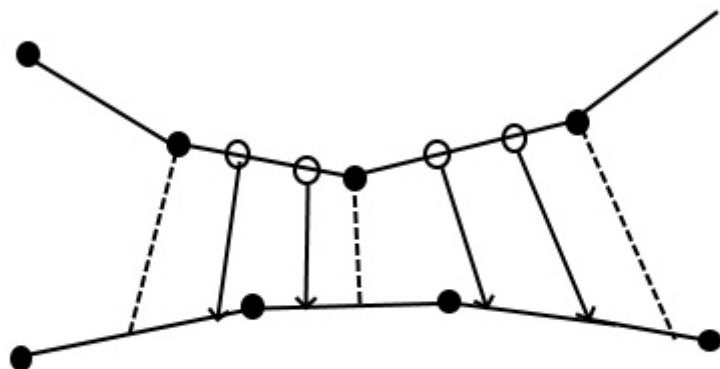
$$\begin{aligned} [K^{UU}]_{ij}^{ab} &= \frac{\partial\{Q^U\}_i^a}{\partial u_j^b} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [K^{U\lambda}]_{im}^{ad} &= \frac{\partial\{Q^U\}_i^a}{\partial \lambda_m^d} \\ &= \begin{cases} \sum_{seg} \int M^s n_i \left(N_s^{p'} \delta_{pp'} - N_m^{p''} \delta_{pp''} \right) ds & m = n \text{ 方向} \\ \sum_{seg} \int M^s \tau_i \left(N_s^{p'} \delta_{pp'} - N_m^{p''} \delta_{pp''} \right) ds & m = \tau \text{ 方向} \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [K^{\lambda U}]_{lj}^{cb} &= \frac{\partial\{Q^\lambda\}_l^c}{\partial u_j^b} \\ &= \begin{cases} \sum_{seg} \int M^r n_j \left(N_s^{q'} \delta_{qq'} - M_m^{q''} \delta_{qq''} \right) ds & l = n \text{ 方向} \\ \sum_{seg} \int M^r \tau_j \left(N_s^{q'} \delta_{qq'} - M_m^{q''} \delta_{qq''} \right) ds & l = \tau \text{ 方向} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} [K^{\lambda\lambda}]_{lm}^{cd} &= \frac{\partial\{Q^\lambda\}_l^c}{\partial \lambda_m^d} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、p、q は \mathbf{u} の要素内節点番号で、全体節点番号 a、b に対応するものとする。r、s は $\boldsymbol{\lambda}$ の要素内節点番号で、全体節点番号 c、d に対応するものとする。 p' は slave の点、 p'' は slave の点に対応する master の点を表す。 q' 、 q'' も同様である。



- 節点
- 積分点

図5 積分点

境界 s_s の積分には数値積分を用いる。このとき積分点は、slave の積分点をまず求め、連続的な法線ベクトル \bar{n} を用いて slave の積分点に対応する master の点を求める。

3 補足

slave の点 \mathbf{x}_s の法線方向にある master の点 \mathbf{x}_m を求める。

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_{m2} - \mathbf{x}_{m1}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{m1}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_m &= \mathbf{x}_{m1} + L_2 \mathbf{v}_1 \\ &= (1 - L_2) \mathbf{x}_{m1} + L_2 \mathbf{x}_{m2}\end{aligned}$$

となる。 $(\mathbf{v}_2 - L_2 \mathbf{v}_1) // \mathbf{n}$ であるから、

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{v}_2 - L_2 \mathbf{v}_1) &= 0 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \{\mathbf{n} \times (\mathbf{v}_2 - L_2 \mathbf{v}_1)\} &= 0 \\ (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_2 - L_2 \mathbf{v}_1) &= 0\end{aligned}$$

したがって、

$$L_2 = \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_2}{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_1}$$

(21)

ただし、 $0 \leq L_2 \leq 1$

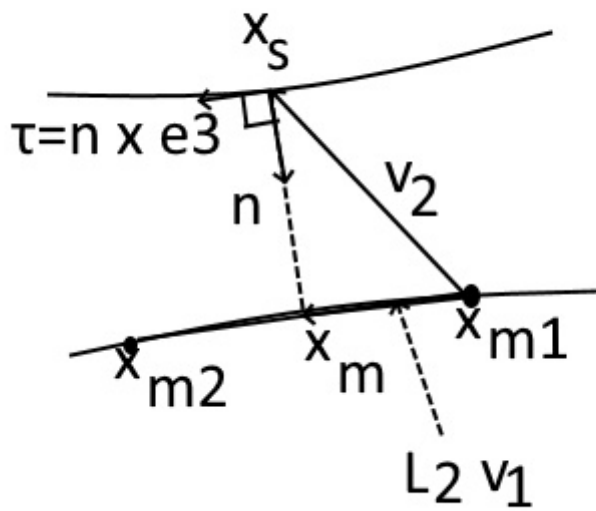


図6 slaveの点の法線方向にあるmasterの点

master の点 \mathbf{x}_m から slave へ垂らした点 \mathbf{x}_s を求める。

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_{s2} - \mathbf{x}_{s1}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{s1}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_s &= \mathbf{x}_{s1} + L_2 \mathbf{v}_1 \\ &= (1 - L_2) \mathbf{x}_{s1} + L_2 \mathbf{x}_{s2}\end{aligned}$$

となる。

$(\mathbf{v}_2 - L_2 \mathbf{v}_1) // \mathbf{n}$ であるから、

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v}_2 - L_2 \mathbf{v}_1) = 0$$

ここで、 \mathbf{n} として連続な法線ベクトルを採用すると、

$$\mathbf{n} = (1 - L_2) \mathbf{n}_{s1} + L_2 \mathbf{n}_{s2}$$

また、

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \mathbf{v}_2 - L_2 \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{s1} - L_2 (\mathbf{x}_{s2} - \mathbf{x}_{s1}) \\ &= \mathbf{x}_m - \{(1 - L_2) \mathbf{x}_{s1} + L_2 \mathbf{x}_{s2}\}\end{aligned}$$

とおくと、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{g} = 0$$

成分で書くと z 成分のみで、

$$n_1 g_2 - n_2 g_1 = 0$$

Newton-Raphson 法を使って解を求める。

$$\begin{aligned}R &= n_1 g_2 - n_2 g_1 \\ K \Delta L_2 &= -R \\ K &= \frac{\partial R}{\partial L_2} \\ &= \frac{\partial n_1}{\partial L_2} g_2 + n_1 \frac{\partial g_2}{\partial L_2} - \frac{\partial n_2}{\partial L_2} g_1 - n_2 \frac{\partial g_1}{\partial L_2} \\ \frac{\partial n_i}{\partial L_2} &= \frac{\partial}{\partial L_2} [(1 - L_2) \mathbf{n}_{s1} + L_2 \mathbf{n}_{s2}]_i \\ &= -(\mathbf{n}_{s1})_i + (\mathbf{n}_{s2})_i \\ \frac{\partial g_i}{\partial L_2} &= \frac{\partial}{\partial L_2} [\mathbf{x}_m - \{(1 - L_2) \mathbf{x}_{s1} + L_2 \mathbf{x}_{s2}\}]_i \\ &= (\mathbf{x}_{s1})_i - (\mathbf{x}_{s2})_i\end{aligned}$$

ただし、 $0 \leq L_2 \leq 1$ である。Newton-Raphson 法の初期値には、 $L_2 = 0.5$ を用いる。

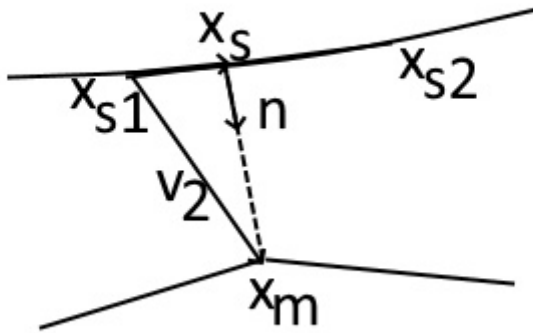


図7 master の点から slave へ垂らした点

4 まとめ

接触解析の FEM 定式化を行った。

Mortar Method を用いて 2 体間の領域を segment に分割し、segment 単位で拘束条件を課した。

5 参考文献

[1] Bin Yang, Tod A. Laursen and Xiaonong Meng, "Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Int. J. Numer. Meth. Engng 2005, Published online 6 December 2004 in Wiley InterScience