

Truss, Beam and Frame Elements

ryujimiya

2020年03月27日

1 はじめに

FEMの一次元構造要素であるトラス (Truss) 要素、一方向ビーム (Beam) 要素、フレーム (Frame) 要素を定式化する。

本書で扱うのは2次元 (軸方向 x , 断面 y) である Planar 要素であり、3次元 (軸方向 x , 断面 y, z) である Space 要素は扱わない。

また、Beam、Frame 要素の梁理論には Euler-Bernoulli 梁理論を用いる。

2 Truss

2.1 支配方程式

軸方向の変位のみ考えると、応力は σ_{xx} のみで、対応するひずみは ϵ_{xx} である。

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = E\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

ここに、 E は Young 率である。

動的つりあいの式

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + f_x^p = \rho \ddot{u}$$

に (2) 式を代入して棒の断面積を掛けると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_x - \rho A \ddot{u} = 0 \quad (3)$$

ここに、 A は棒の断面積、 f_x は軸方向外力に面積 A を掛けたもので、 ρ は密度である。

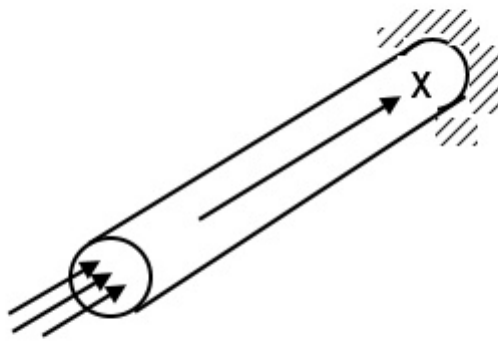


图 1 Truss

2.2 弱形式

(3) 式にテスト関数 u^* を掛けて軸方向に積分すると、

$$\int_0^{l_e} u^* \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_x - \rho A \ddot{u} \right\} dx = 0 \quad (4)$$

ここで、

$$f \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (fg) - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

を使うと、

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u^* EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial u^*}{\partial x} EA \frac{\partial u}{\partial x} \\ \int_0^{l_e} u^* \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx &= u^* EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} EA \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ &= u^* \sigma_{xx} A \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} EA \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ &\quad (\sigma_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} \text{ を用いた}) \end{aligned} \quad (5)$$

となるから、次の弱形式を得る。

$$\int_0^{l_e} EA \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^{l_e} u^* \rho A \ddot{u} dx = \int_0^{l_e} u^* f_x dx + u^* \sigma_{xx} A \Big|_0^{l_e} \quad (6)$$

これより、 u 、 u^* に要素間で連続な補間関数を選ぶとすると、自然境界条件は、

$$\sigma_{xx} = 0 \quad \text{or} \quad E \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

2.3 要素マトリクス

u を 2 節点の変位 u_1 、 u_2 を用いて次のように補間する。

$$u = \{N\}^T \{d\} \quad (8)$$

$$\{d\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\{N\} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_e}$$

$$N_2 = \frac{x}{l_e} \quad (10)$$

要素剛性マトリクスを求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \{d\} \\ &= \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \{d\}\end{aligned}\quad (11)$$

$$= \{B\}^T \{d\} \quad (12)$$

$$\int_0^{l_e} EA \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \{d^*\} [K_e] \{d\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}[K_e] &= EA \int_0^{l_e} \{B\} \{B\}^T dx \\ &= EA l_e \int_0^1 \{B\} \{B\}^T d\left(\frac{x}{l_e}\right)\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\{B\} \{B\}^T &= \frac{1}{l_e^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{l_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (15)$$

$$[K_e] = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

要素質量マトリクスを求める。

$$\int_0^{l_e} \rho A u^* \ddot{u} dx = \{d\} [M_e] \{\ddot{d}\} \quad (17)$$

$$[M_e] = \rho A \int_0^{l_e} \{N\} \{N\}^T dx \quad (18)$$

$$\{N\} \{N\}^T = \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$N_1 N_1 = 1 - \frac{2}{l_e} x + \frac{x^2}{l_e^2}$$

$$N_1 N_2 = \frac{x}{l_e} - \frac{x^2}{l_e^2}$$

$$N_2 N_2 = \frac{x^2}{l_e^2}$$

$$\int_0^{l_e} N_1 N_1 dx = \frac{1}{6} l_e^2$$

$$\int_0^{l_e} N_1 N_2 dx = \frac{1}{6} l_e$$

$$\int_0^{l_e} N_2 N_2 dx = \frac{1}{6} l_e^2$$

$$[M_e] = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

(6) 式は次のようになる。

$$[K_e]\{d\} + [M_e]\{\ddot{d}\} = \{f\} \quad (21)$$

静的解析の場合は、 \ddot{d} の項が消滅する。

動的解析の場合は、Newmark β を用いれば、 \ddot{d} は d を用いて表すことができる。

2.4 Global 座標系への変換

Local node 1, 2 が Global node i, j に対応しているものとする。

Local 座標系を x 、Global 座標系を (X, Y) とする。

節点 i の変位の X, Y 成分を D_{2i-1}, D_{2i} とすると、

$$\{d\} = [T]\{D\} \quad (22)$$

$$\{d\} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\{D\} = \begin{bmatrix} D_{2i-1} \\ D_{2i} \\ D_{2j-1} \\ D_{2j} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$[T]$ は変換マトリクスで、

$$[T] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_x & m_x \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$l_x = \cos(x, X) = \frac{X_j - X_i}{l_e}$$

$$m_x = \cos(x, Y) = \frac{Y_j - Y_i}{l_e} \quad (26)$$

$$[T][T]^T = [1] \quad (27)$$

つまり、 $[T]$ は直交行列 (orthogonal matrix) である。

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (28)$$

(22) 式は節点 i に関していえば、 d_1 が D_{2i-1}, D_{2i} の Local x 軸への projection の総和であることを示している。

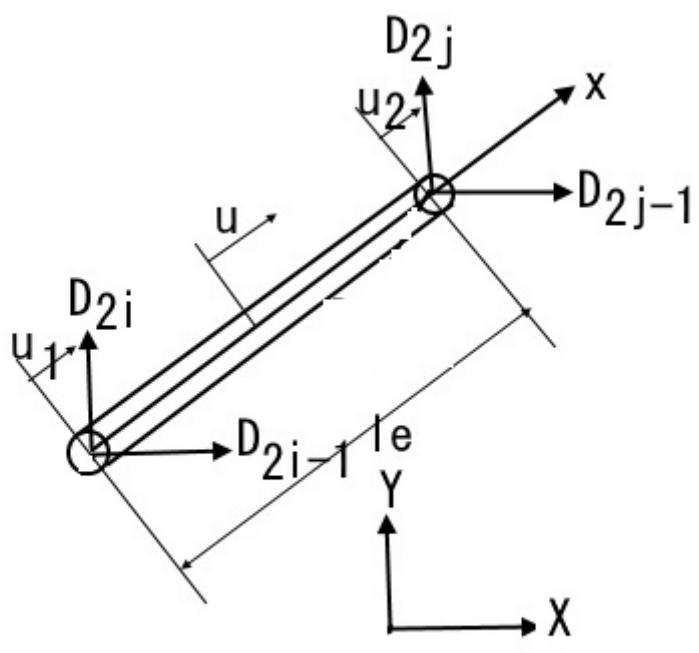


图 2 Planar Truss(Global 座標系)

変換行列は force vector にも適用できる。

$$\{f\} = [T]\{F\} \quad (29)$$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} F_{2i-1} \\ F_{2i} \\ F_{2j-1} \\ F_{2j} \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここに、 F_{2i-1} 、 F_{2i} は節点 i における Global 座標系の 3 成分である。

(21) 式の Local 座標系の要素方程式、

$$[k_e]\{d\} + [m_e]\{\ddot{d}\} = \{f\} \quad [(21) \text{ 式}]$$

に (22) 式を代入すると、

$$[k_e][T]\{D\} + [m_e][T]\{\ddot{D}\} = \{f\}$$

前から $[T]^T$ を掛けると、

$$[T]^T [k_e][T]\{D\} + [T]^T [m_e][T]\{\ddot{D}\} = [T]^T \{f\} \quad (32)$$

or、

$$[K_e]\{D\} + [M_e]\{\ddot{D}\} = \{F\} \quad (33)$$

ここに、

$$[K_e] = [T]^T [k_e][T] \quad (34)$$

$$[M_e] = [T]^T [m_e][T] \quad (35)$$

$$(36)$$

$$\{F_e\} = [T]^T \{f_e\} \quad (37)$$

なお、

$$[T]^T \{f\} = [T]^T [T]\{F\} = [1]\{F\} = \{F\} \quad (38)$$

と導出できる。

3 Euler-Bernuoulli Beam

3.1 変位、ひずみ、応力

断面は変形しないとする ($\epsilon_{yy} = 0$, $\epsilon_{yz} = 0$)。

Euler-Bernuoulli の仮定が成り立つとする、すなわち、変形前の中立軸に垂直な断面（平面）は変形後の中心軸に垂直な平面を保つとする。

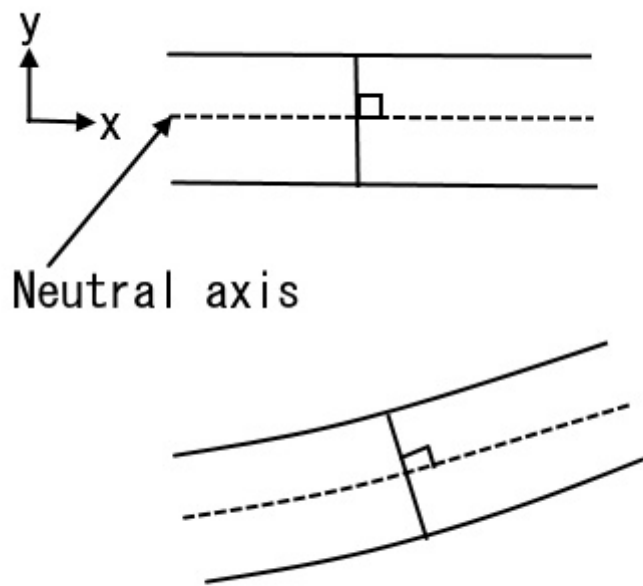


图 3 Beam

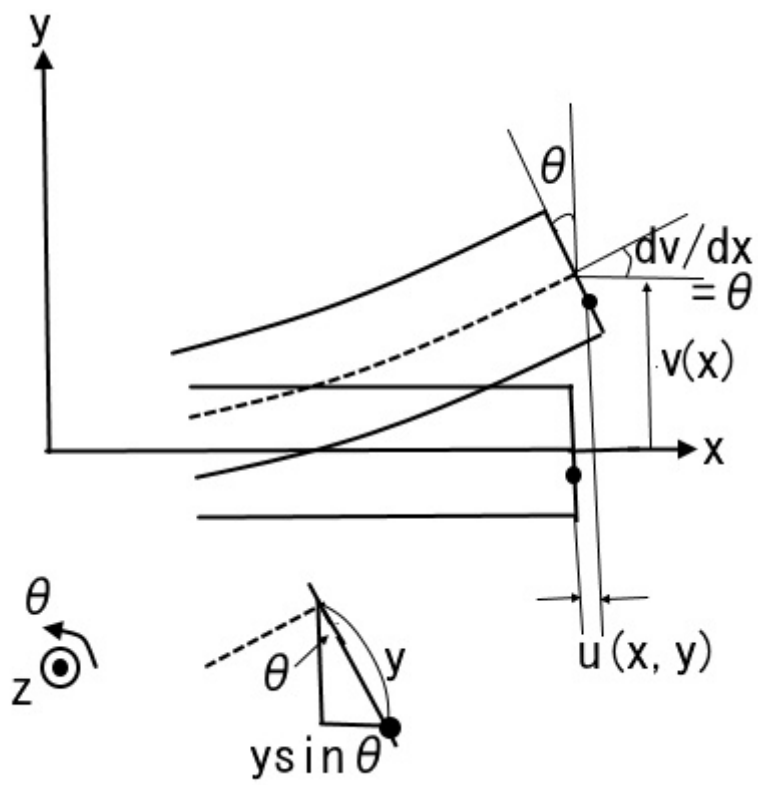


图 4 Beam

Euler-Bernoulli の仮定は曲げを受ける平面内 (x-y 平面) のせん断変形は生じないことを示し、

$$\epsilon_{xy} = 0 \quad \text{or} \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (39)$$

x 方向変位 $u(x, y)$ は、

$$u(x, y) = -y \sin \theta \simeq -y\theta \quad (40)$$

ここに、 θ は z 軸周りの回転角である。

Euler-Bernoulli の仮定より、回転角 θ は中立軸の傾きとして表せる。

$$\theta = \frac{dv(x)}{dx} \quad (41)$$

ここに、 $v(x)$ は中立軸の y 方向変位であり、たわみと呼ばれる。たわみは x だけの関数とする。

(41) 式を (40) 式に代入して、

$$u(x, y) = -y \frac{dv(x)}{dx} \quad (42)$$

ひずみを求める。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-y \frac{dv}{dx} \right) \\ &= -y \frac{d^2v(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\epsilon_{yy} = 0 \quad (v = v(x) \text{ より}) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-y \frac{dv}{dx} \right) + \frac{dv}{dx} \\ &= -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

ϵ_{xx} すなわち軸ひずみのみ生じる。

応力は、

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = -Ey \frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (46)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (47)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (48)$$

σ_{xx} は y 方向に線形に変化することが分かる。

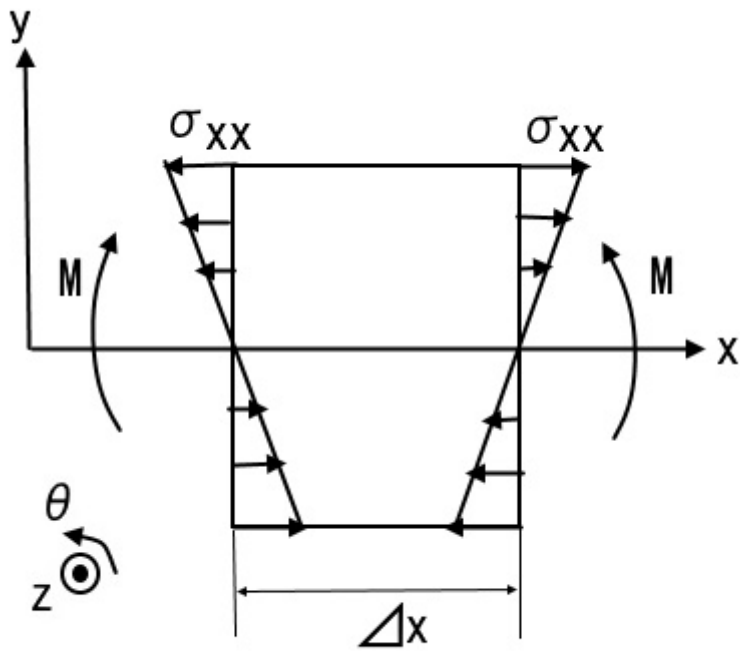


図5 Beam モーメント

σ_{xx} によってモーメントが生じる。モーメント M と軸応力 σ_{xx} の正の向きが逆であることに注意するとモーメント M は、

$$\begin{aligned} M &= - \int_A \sigma_{xx} y dA \\ &= - \int_A \left(-Ey \frac{d^2v}{dx^2} \right) y dA \\ &= E \int_A y^2 dA \frac{d^2v}{dx^2} \\ &= EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (49)$$

$$I = \int_A y^2 dA \quad (50)$$

I は z 軸周りの断面 2 次モーメントである。 EI は曲げ剛性と呼ばれ、梁の曲がりにくさを表している。

y - z 断面が長方形断面で、 $z = [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ $y = [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ のとき、 z 軸周りの断面 2 次モーメント I_z (上式の I) は次式となる。

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz y^2 \\ &= \frac{1}{12} b h^3 \end{aligned}$$

y 軸周りの断面 2 次モーメント I_y は次式となる。

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz z^2 \\ &= \frac{1}{12} b^3 h \end{aligned}$$

3.2 支配方程式

まず静的曲げの場合の梁のつり合い式を求める。

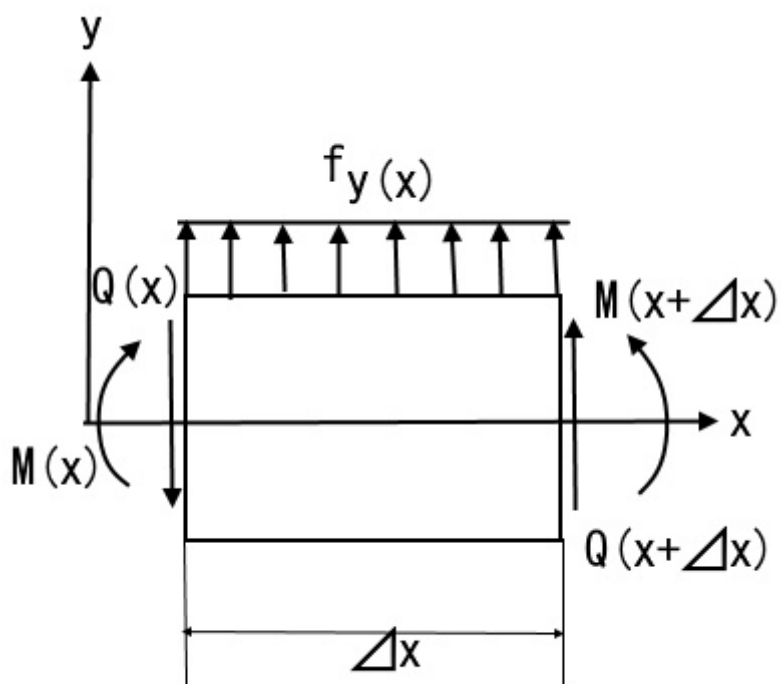


図6 Beam 釣りあい

微小梁要素における鉛直方向の力のつり合い (force equilibrium) は、

$$Q(x + \Delta x) - Q(x) + f_y \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x = 0 \quad (51)$$

$$\frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x} + f_y \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 0$$

$\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$\frac{dQ}{dx} + f_y = 0 \quad (52)$$

$(x + \Delta x)$ の位置のモーメントのつり合い (moment equilibrium) は、

$$M(x + \Delta x) - M(x) + Q(x + \Delta x)\Delta x + f_y \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (53)$$

$$\frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} + Q(x + \Delta x) + \frac{1}{2}f_y \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x$$

$\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$\frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad (54)$$

or

$$Q = -\frac{dM}{dx} \quad (55)$$

これを (52) 式に代入する。

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{dM}{dx} \right) + f_y = 0$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - f_y = 0 \quad (56)$$

(49) 式を (56) 式に代入すると、次の Euler-Bernuoulli 梁の静的支配方程式が得られる。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) - f_y = 0 \quad (57)$$

また動的支配方程式は、

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) - f_y + \rho A \ddot{v}(x) = 0 \quad (58)$$

となる。

4 Euler-Bernoulli Beam 要素の弱形式

(58) 式に任意の仮想変位 v^* を掛けて、軸方向に積分すると、

$$\int_0^{l_e} v^* \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - f_y + \rho A \ddot{v} \right\} dx = 0 \quad (59)$$

ここで、第1項を変形する。

$$f \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(fg) - \frac{df}{dx}g \quad (60)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} v^* \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) &= v^* \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right\} \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left(v^* EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right\} - \frac{dv^*}{dx} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ v^* \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right\} - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{dv^*}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right\} + \frac{d^2 v^*}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \\ \int_0^{l_e} \left\{ v^* \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right\} dx &= v^* \frac{dM}{dx} \Big|_0^{l_e} - \frac{dv^*}{dx} M \Big|_0^{l_e} + \int_0^{l_e} EI \frac{d^2 v^*}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \\ &\quad (M = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \text{を用いた}) \\ &= -v^* Q \Big|_0^{l_e} - \frac{dv^*}{dx} M \Big|_0^{l_e} + \int_0^{l_e} EI \frac{d^2 v^*}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \\ &\quad (Q = -\frac{dM}{dx} \text{を用いた}) \end{aligned} \quad (61)$$

したがって Euler-Bernoulli Beam 要素の弱形式は、

$$\int_0^{l_e} EI \frac{d^2 v^*}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^{l_e} \rho A v^* \ddot{v} dx = \int_0^{l_e} v^* f_y dx + \frac{dv^*}{dx} M \Big|_0^{l_e} + v^* Q \Big|_0^{l_e} \quad (62)$$

弱形式より v は要素間で一回微分まで連続な補間関数を使用する必要があることが分かる。

このとき自然境界条件は、

$$M = 0 \quad (63)$$

$$Q = 0 \quad (64)$$

となる。

4.1 形状関数

変位 v は要素間で v と $\frac{dv}{dx}$ が連続であることを要請する。つまり形状関数は Lagrange 要素のそれではなく、Hermite 要素の形状関数でなければならない。Natural coordinate ξ と Local coordinate x の関係は、

$$\xi = \frac{2x}{l_e} - 1 \quad (0 \leq x \leq l_e, \quad -1 \leq \xi \leq 1) \quad (65)$$

変位 v は ξ の 3 次多項式で表されると仮定する。

$$v = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 \quad (66)$$

回転角 θ は、

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{2}{l_e} \\ &\quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l_e} \text{を用いた} \right) \\ &= \frac{2}{l_e} (\alpha_1 + 2\alpha_2\xi + 3\alpha_3\xi^2) \end{aligned} \quad (67)$$

4 つの未知数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は次の条件から決定する。

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ or } \xi = -1 : v|_{\xi=-1} &= v_1 \\ \frac{dv}{dx} \Big|_{\xi=-1} &= \theta_1 \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} x = l_e \text{ or } \xi = 1 : v|_{\xi=1} &= v_2 \\ \frac{dv}{dx} \Big|_{\xi=1} &= \theta_2 \end{aligned} \quad (69)$$

$$(70)$$

これらの条件を (66) 式、(67) 式に適用すると、

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{2}{l_e} & -\frac{4}{l_e} & \frac{6}{l_e} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{l_e} & \frac{4}{l_e} & \frac{6}{l_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (71)$$

{ α } について解くと、

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \frac{l_e}{2} & 2 & -\frac{l_e}{2} \\ -3 & -\frac{l_e}{2} & 3 & -\frac{l_e}{2} \\ 0 & -\frac{l_e}{2} & 0 & \frac{l_e}{2} \\ 1 & \frac{l_e}{2} & -1 & \frac{l_e}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (72)$$

これを (66) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} v &= [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3] \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \frac{l_e}{2} & 2 & -\frac{l_e}{2} \\ -3 & -\frac{l_e}{2} & 3 & -\frac{l_e}{2} \\ 0 & -\frac{l_e}{2} & 0 & \frac{l_e}{2} \\ 1 & \frac{l_e}{2} & -1 & \frac{l_e}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= [N_{v_1} \quad N_{\theta_1} \quad N_{v_2} \quad N_{\theta_2}] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (73) \end{aligned}$$

$$= \{N\}^T \{d\} \quad (74)$$

$$\{d\} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\{N\} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{v_1} \\ N_{\theta_1} \\ N_{v_2} \\ N_{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (75)$$

したがって形状関数は、

$$\begin{aligned} N_1 = N_{v_1} &= \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^3) \\ N_2 = N_{\theta_1} &= \frac{1}{8} l_e (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_3 = N_{v_2} &= \frac{1}{4} (2 + 3\xi - \xi^3) \\ N_4 = N_{\theta_2} &= \frac{1}{8} l_e (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (76) \end{aligned}$$

形状関数の微分を求める。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(-3 + 3\xi^2) \\
 \frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}l_e(-1 - 2\xi + 3\xi^2) \\
 \frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(3 - 3\xi^2) \\
 \frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}l_e(-1 + 2\xi + 3\xi^2)
 \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi^2} &= \frac{3}{2}\xi \\
 \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{4}l_e(-1 + 3\xi) \\
 \frac{\partial^2 N_3}{\partial \xi^2} &= -\frac{3}{2}\xi \\
 \frac{\partial^2 N_4}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{4}l_e(1 + 3\xi)
 \end{aligned} \tag{78}$$

4.2 要素マトリクス

要素剛性マトリクスを求める。

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \\
 &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \\
 &= \frac{4}{l_e^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2}\{N\}^T\{d\} \\
&= \frac{4}{l_e^2} \frac{\partial^2\{N\}}{\partial\xi^2}\{d\} \\
&= \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{l_e} \\ -1+3\xi \\ \frac{6\xi}{l_e} \\ 1+3\xi \end{bmatrix}^T \{d\} \\
&= \{B\}^T\{d\}
\end{aligned} \tag{79}$$

を用いると、

$$\int_0^{l_e} EI \frac{d^2v^*}{dx^2} \frac{d^2v}{dx^2} dx = \{d^*\}[K_e]\{d\} \tag{80}$$

$$[K_e] = EI \int_0^{l_e} \{B\}\{B\}^T dx \tag{81}$$

さらに、

$$\begin{aligned}
\{B\}\{B\}^T &= \begin{bmatrix} B_1B_1 & B_1B_2 & B_1B_3 & B_1B_4 \\ B_2B_1 & B_2B_2 & B_2B_3 & B_2B_4 \\ B_3B_1 & B_3B_2 & B_3B_3 & B_3B_4 \\ B_4B_1 & B_4B_2 & B_4B_3 & B_4B_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{36\xi^2}{l_e^2} & \frac{1}{l_e}(-6\xi+18\xi^2) & -\frac{36\xi^2}{l_e^2} & \frac{1}{l_e}(6\xi+18\xi^2) \\ & 1-6\xi+9\xi^2 & \frac{1}{l_e}(6\xi-18\xi^2) & -1+9\xi^2 \\ & & \frac{36\xi^2}{l_e^2} & \frac{1}{l_e}(-6\xi-18\xi^2) \\ & & & 1+6\xi+9\xi^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$dx = \frac{l_e}{2} d\xi$$

$$\int_0^{l_e} dx = \frac{l_e}{2} \int_{-1}^1 d\xi = l_e$$

$$\int_0^{l_e} \xi dx = \frac{l_e}{2} \int_{-1}^1 \xi d\xi = 0$$

$$\int_0^{l_e} \xi^2 dx = \frac{l_e}{2} \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi = \frac{l_e}{3}$$

であるから、要素剛性行列が次のように求まる。

$$[K_e] = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix} \tag{82}$$

要素質量行列を求める。

$$\int_0^{l_e} \rho A v^* \ddot{u} dx = \rho A \int_0^{l_e} \{N\}\{N\}^T dx \quad (83)$$

$$\{N\}\{N\}^T = \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 \end{bmatrix}$$

$$N_1 N_1 = \frac{1}{16} (4 - 12\xi + 9\xi^2 + 4\xi^3 - 6\xi^4 + \xi^6)$$

$$N_1 N_2 = \frac{1}{32} l_e (2 - 5\xi + \xi^2 + 6\xi^3 - 4\xi^4 - \xi^5 + \xi^6)$$

$$N_1 N_3 = \frac{1}{16} (4 - 9\xi^2 + 6\xi^4 - \xi^6)$$

$$N_1 N_4 = \frac{1}{32} l_e (-2 + \xi + 5\xi^2 - 2\xi^3 - 4\xi^4 + \xi^5 + \xi^6)$$

$$N_2 N_2 = \frac{1}{64} l_e^2 (1 - 2\xi - \xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4 - 2\xi^5 + \xi^6)$$

$$N_2 N_3 = \frac{1}{32} l_e (2 + \xi - 5\xi^2 - 2\xi^3 + 4\xi^4 + \xi^5 - \xi^6)$$

$$N_2 N_4 = \frac{1}{64} l_e^2 (-1 + 3\xi^2 - 3\xi^4 + \xi^6)$$

$$N_3 N_3 = \frac{1}{16} (4 + 12\xi + 9\xi^2 - 4\xi^3 - 6\xi^4 + \xi^6)$$

$$N_3 N_4 = \frac{1}{32} l_e (-2 - 5\xi - \xi^2 + 6\xi^3 + 4\xi^4 - \xi^5 - \xi^6)$$

$$N_4 N_4 = \frac{1}{64} l_e^2 (1 + 2\xi - \xi^2 - 4\xi^3 - \xi^4 + 2\xi^5 + \xi^6) \quad (84)$$

$$\int_0^{l_e} dx = l_e$$

$$\int_0^{l_e} \xi dx = 0$$

$$\int_0^{l_e} \xi^2 dx = \frac{l_e}{3}$$

$$\int_0^{l_e} \xi^3 dx = 0$$

$$\int_0^{l_e} \xi^4 dx = \frac{l_e}{5}$$

$$\int_0^{l_e} \xi^5 dx = 0$$

$$\int_0^{l_e} \xi^6 dx = \frac{l_e}{7}$$

を用いると、要素質量行列は次のように求まる。

$$[M_e] = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ & & 156 & -22l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (85)$$

弱形式は、次式となる。

$$[K_e]\{d\} + [M_e]\{\ddot{d}\} = \{f\} \quad (86)$$

静的解析の場合は、第2項は消滅する。

動的解析の場合は、Newmark β 法を用いると \ddot{d} は d を用いて表せる。

4.3 Global 座標系への変換

Beam 要素はすべての要素が一方向に向いている場合にしか適用できない。

異なる方向の Beam を接続する場合には軸方向の変形も発生するので次の Frame 要素を用いる。

5 Frame

異なる方向の梁を接続する場合に Frame 要素を用いる。

Planar(2次元)Frame の場合、Truss 要素と Beam 要素を合体させたものになる。

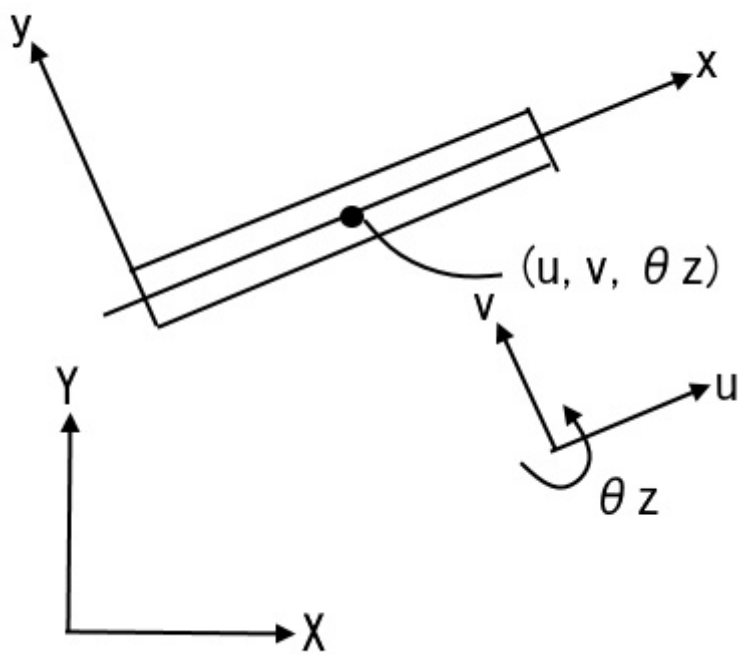


图 7 Planar Frame

5.1 支配方程式

変位は、

$$u(x, y) = u(x) - y\theta_z(x) \quad (87)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (88)$$

$$\theta_z(x) = \frac{dv(x)}{dx} \quad (89)$$

$u(x)$ は Truss 要素、 $v(x)$ 、 $\theta_z(x)$ は Beam 要素によるものであり、支配方程式は、

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du(x)}{dx} \right) + f_x - \rho A \ddot{u}(x) = 0 \quad (90)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right) - f_y + \rho A \ddot{v}(x) = 0 \quad (91)$$

5.2 要素マトリクス

Truss 要素は 1 節点につき 1 自由度（軸方向の変形 u ）を持ち、Beam 要素は 1 節点につき 2 自由度（断面方向の変形 v と回転角 θ_z ）を持っていた。

Planar frame の自由度はこれらを合体させたものとなり、

$$\{d\} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$u = N_1^{\text{truss}} u_1 + N_2^{\text{truss}} u_2 \quad (93)$$

$$v = N_1^{\text{beam}} v_1 + N_2^{\text{beam}} \theta_{z1} + N_3^{\text{beam}} v_2 + N_4^{\text{beam}} \theta_{z2} \quad (94)$$

Planar frame の要素マトリクスは Truss と Beam を合体したものになる。

$$[k_e] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_{z1} & u_2 & v_2 & \theta_{z2} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & 0 & 0 \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (95)$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{EA}{l_e}, \quad k_{14} = \frac{EA}{l_e}(-1) \\
k_{22} &= \frac{EI}{l_e^3}12, \quad k_{23} = \frac{EI}{l_e^3}6l_e, \quad k_{25} = \frac{EI}{l_e^3}(-12), \quad k_{26} = \frac{EI}{l_e^3}6l_e \\
k_{33} &= \frac{EI}{l_e^3}4l_e^2, \quad k_{35} = \frac{EI}{l_e^3}(-6l_e), \quad k_{36} = \frac{EI}{l_e^3}2l_e^2 \\
k_{44} &= \frac{EA}{l_e} \\
k_{55} &= \frac{EI}{l_e^3}12, \quad k_{56} = \frac{EI}{l_e^3}(-6l_e) \\
k_{66} &= \frac{EI}{l_e^3}4l_e^2
\end{aligned} \tag{96}$$

$$[m_e] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 & 0 \\ & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} & m_{26} \\ & & m_{33} & 0 & m_{35} & m_{36} \\ & & & m_{44} & 0 & 0 \\ & & & & m_{55} & m_{56} \\ & & & & & m_{66} \end{bmatrix} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{\rho A l_e}{6}2, \quad m_{14} = \frac{\rho A l_e}{6} \\
m_{22} &= \frac{\rho A l_e}{420}156, \quad m_{23} = \frac{\rho A l_e}{420}22l_e, \quad m_{25} = \frac{\rho A l_e}{420}54, \quad m_{26} = \frac{\rho A l_e}{420}(-13l_e) \\
m_{33} &= \frac{\rho A l_e}{420}4l_e^2, \quad m_{35} = \frac{\rho A l_e}{420}13l_e, \quad m_{36} = \frac{\rho A l_e}{420}(-3l_e^2) \\
m_{44} &= \frac{\rho A l_e}{6}2 \\
m_{55} &= \frac{\rho A l_e}{420}156, \quad m_{56} = \frac{\rho A l_e}{420}(-22l_e) \\
m_{66} &= \frac{\rho A l_e}{420}4l_e^2
\end{aligned} \tag{98}$$

5.3 Global 座標系への変換

Local 座標系を (x,y)、Global 座標系を (X,Y) とする。

Local 節点 1、2 が Global 節点 i、j に対応するものとする。

Local 節点 1 について Local 自由度が u_1, v_1, θ_{z1} であった。Global 節点 i の自由度は X,Y 方向変位と回転変形の 3 つとなる。これらを $D_{3i-2}, D_{3i-1}, D_{3i}$ とする。

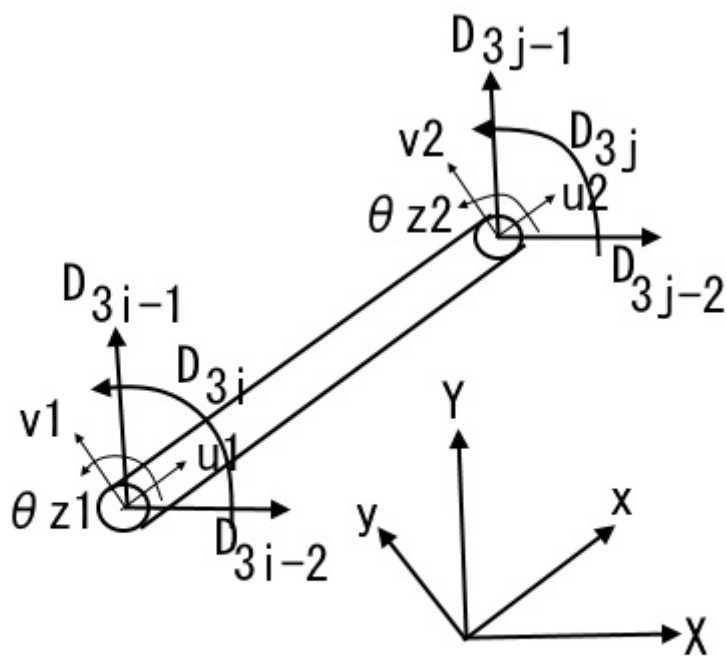


图 8 Planar Frame(Global 座標系)

$$\{d\} = [T]\{D\} \quad (99)$$

$$\{d\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$\{D\} = \begin{bmatrix} D_{3i-2} \\ D_{3i-1} \\ D_{3i} \\ D_{3j-2} \\ D_{3j-1} \\ D_{3j} \end{bmatrix} \quad (101)$$

T

$$= \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_y & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$l_x = \cos(x, X) = \frac{X_j - X_i}{l_e}$$

$$m_x = \cos(x, Y) = \frac{Y_j - Y_i}{l_e}$$

$$m_y = \cos(y, X) = -\frac{Y_j - Y_i}{l_e}$$

$$l_y = \cos(y, Y) = \frac{X_j - X_i}{l_e} \quad (103)$$

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (104)$$

Global 座標系での要素マトリクスは、

$$[K_e] = [T]^T [k_e] [T] \quad (105)$$

$$[M_e] = [T]^T [m_e] [T] \quad (106)$$

$$\{F_e\} = [T]^T \{f_e\} \quad (107)$$

6 まとめ

FEM1 次構造要素であるトラス、(一方向) ビーム、フレーム要素の定式化を行った。

7 参考文献

[1] what-when-how, In Depth Tutorials and Information, "Introduction to Mechanics for Solids and Structures (Finite Element Method)"

- [2] what-when-how, In Depth Tutorials and Information, "FEM for Trusses (Finite Element Method)"
- [3] what-when-how, In Depth Tutorials and Information, "FEM for Beams (Finite Element Method)"
- [4] what-when-how, In Depth Tutorials and Information, "FEM for Frames (Finite Element Method)"
- [5] 車谷麻緒, "有限要素法の基礎理論", 構造工学における有限要素法の基礎と応用講習会, Oct, 2011