

Timoshenko Beam(Frame) Using Total Lagrangian Formulation

ryujimiya

2020年04月30日

1 はじめに

幾何学的非線形を扱うために Timoshenko 梁の Total Lagrange 法による定式化を行う。

Euler-Bernoulli 梁を Total Lagrange 法で解く場合は、変位と回転角の関係を満たす field-consistent な補間関数を用いる必要があった (「Euler-Bernoulli Field-Consistent Beam(Frame) Using Total Lagrangian Formulation」を参照)。

Timoshenko 梁の場合は、変位と回転角の関係を考えず独立とし従来の線形補間関数を用いることができる。ただし、shear locking を回避するため低減積分を用いる。

2 Kinematics

初期位置 C_0 は X 軸に沿っている場合について定式化する (ローカルな定式化)。

変形によって初期位置 C_0 の点 $P_0(X, Y)$ が現在位置 C の点 $P(x, y)$ に移動するものとする。

Timoshenko 梁の仮定の下では、

$$x = X + u_X - Y \sin \theta \quad (1)$$

$$y = u_Y + Y \cos \theta \quad (2)$$

u_X 、 u_Y は $P_0(X, Y)$ を中立軸 (neutral axis) へ投影した点の変位であり、 θ は断面の回転角である。現在位置における中立軸の微小長さを ds とすると、

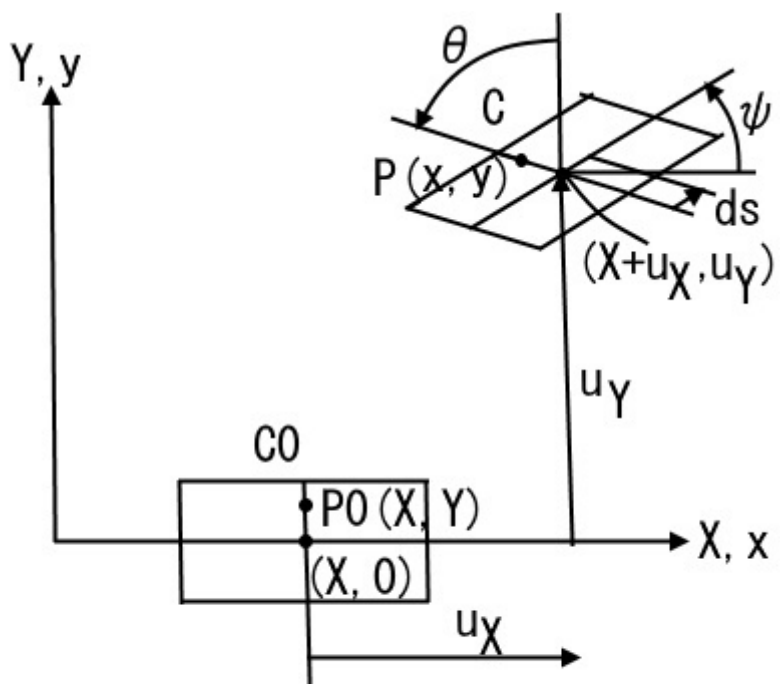


图 1 Kinematics

$$\begin{aligned}
dx &= ds \cos \psi \\
dy &= ds \sin \psi \\
\rightarrow \\
\frac{\partial x}{\partial X} &= \frac{\partial s}{\partial X} \cos \psi \\
\frac{\partial y}{\partial X} &= \frac{\partial s}{\partial X} \sin \psi \\
\rightarrow \\
1 + u'_X &= s' \cos \psi \\
u'_Y &= s' \sin \psi \tag{3} \\
s' &= \sqrt{(1 + u'_X)^2 + (u'_Y)^2} \tag{4}
\end{aligned}$$

ここに、prime は X についての偏微分である。

変形勾配テンソル \mathbf{F} を求める。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u'_X - Y\theta' \cos \theta & -\sin \theta \\ u'_Y - Y\theta' \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \tag{5}$$

Green-Lagrange ひずみ \mathbf{E} を求める。

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{XX} & E_{XY} \\ E_{YX} & E_{YY} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \tag{6}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^T \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} F_{XX} & F_{YX} \\ F_{XY} & F_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{XX} & F_{XY} \\ F_{YX} & F_{YY} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{XX}^2 + F_{YX}^2 & F_{XX}F_{XY} + F_{YX}F_{YY} \\ F_{XY}F_{XX} + F_{YY}F_{YX} & F_{XY}^2 + F_{YY}^2 \end{bmatrix} \\
F_{XX}^2 + F_{YX}^2 &= (1 + u'_X - Y\theta' \cos \theta)^2 + (u'_Y - Y\theta' \sin \theta)^2 \\
&= 1 + 2(u'_X - Y\theta' \cos \theta) + (u'_X - Y\theta' \cos \theta)^2 + (u'_Y - Y\theta' \sin \theta)^2 \\
F_{XX}F_{XY} + F_{YX}F_{YY} &= (1 + u'_X - Y\theta' \cos \theta)(-\sin \theta) + (u'_Y - Y\theta' \sin \theta) \cos \theta \\
&= -(1 + u'_X) \sin \theta + u'_Y \cos \theta \\
F_{XY}^2 + F_{YY}^2 &= (-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1
\end{aligned}$$

であるから、

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2(u'_X - Y\theta' \cos \theta) + (u'_X - Y\theta' \cos \theta)^2 + (u'_Y - Y\theta' \sin \theta)^2 & -(1 + u'_X) \sin \theta + u'_Y \cos \theta \\ -(1 + u'_X) \sin \theta + u'_Y \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

\mathbf{E} の線形化を行う。

直交行列 \mathbf{R} を導入する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}\mathbf{R}^T &= \mathbf{I} \\
\mathbf{R}(-\alpha) &= \mathbf{R}(\alpha)^T
\end{aligned} \tag{8}$$

\mathbf{R} は Z 軸周りの回転を表現する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 1 + u'_X - Y\theta' \cos \theta & -\sin \theta \\ u'_Y - Y\theta' \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s' \cos \psi - Y\theta' \cos \theta & -\sin \theta \\ s' \sin \psi - Y\theta' \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{R}(-\psi) \begin{bmatrix} s' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(-\theta) \begin{bmatrix} -Y\theta' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

新たに $\bar{\mathbf{F}}$ を定義する。

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{F} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(-\psi) \begin{bmatrix} s' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(-\theta) \begin{bmatrix} -Y\theta' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{R}(\theta - \psi) \begin{bmatrix} s' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y\theta' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} s' \cos(\theta - \psi) - Y\theta' & 0 \\ -s' \sin(\theta - \psi) & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$= \mathbf{L} + \mathbf{I} \tag{12}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} s' \cos(\theta - \psi) - Y\theta' - 1 & 0 \\ -s' \sin(\theta - \psi) & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

\mathbf{L} はこれから示すように線形項になる。

\mathbf{R} が直交行列であるから、

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$$

となる。これを使うと、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \\
&= \frac{1}{2}\{(\mathbf{L}^T + \mathbf{I})(\mathbf{L} + \mathbf{I}) - \mathbf{I}\} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T + \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \\
&\simeq \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$= \begin{bmatrix} s' \cos(\theta - \psi) - Y\theta' - 1 & -\frac{1}{2}s' \sin(\theta - \psi) \\ -\frac{1}{2}s' \sin(\theta - \psi) & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

微小ひずみを仮定すると \mathbf{L} の $(s' - 1)$ 、 $Y\theta'$ 、 $(\theta - \psi)$ が小さいので、 $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ の項は無視できるとした。

ひずみの成分は、

$$\begin{aligned}
E_{XX} &= s' \cos(\theta - \psi) - Y\theta' - 1 \\
&= s' \cos \theta \cos \psi + s' \sin \theta \sin \psi - Y\theta' - 1 \\
&= (1 + u'_X) \cos \theta + u'_Y \sin \theta - Y\theta' - 1
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{XY} &= 2E_{XY} = \Gamma_{YX} = 2E_{YX} \\
&= -s' \sin(\theta - \psi) \\
&= -s' \sin \theta \cos \psi + s' \cos \theta \sin \psi \\
&= -(1 + u'_X) \sin \theta + u'_Y \cos \theta
\end{aligned} \tag{17}$$

3 Total Lagrange 法

Total Lagrange 法における仮想仕事式は、

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \sum_p F_{Xp} \delta u_{Xp} + \sum_p F_{Yp} \delta u_{Yp} + \sum_p M_{Zp} \delta \theta_{Zp} \tag{18}$$

ここに、double dot を

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} \tag{19}$$

と定義する。 \mathbf{S} は第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルである。 F_{Xp}, F_{Yp}, M_{Zp} ($p = 1, 2$) は梁の 2 つの端における外力である。

構成則

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \mathbf{C} : \mathbf{E} \\
S_{gh} &= C_{ghef} E_{ef} \\
S_{XX} &= E E_{XX} \\
S_{XY} &= \kappa G \Gamma_{XY} \\
S_{YX} &= \kappa G \Gamma_{YX} = S_{XY} \\
S_{YY} &= 0 \quad (E_{YY} = 0)
\end{aligned} \tag{20}$$

ここに、 E :Young 率、 G :せん断係数、 κ :せん断補正係数 (Timoshenko せん断係数) である。

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} &= S_{XX} \delta E_{XX} + S_{XY} \delta E_{XY} + S_{YX} \delta E_{YX} + S_{YY} \delta E_{YY} \\
&= S_{XX} \delta E_{XX} + 2S_{XY} \delta E_{XY} \\
&= S_{XX} \delta E_{XX} + S_{XY} \delta \Gamma_{XY} \\
&= E E_{XX} \delta E_{XX} + \kappa G \Gamma_{XY} \delta \Gamma_{XY}
\end{aligned} \tag{21}$$

E_{XX} 、 Γ_{XY} の第 1 変分を求める。

$$\begin{aligned}
\delta E_{XX} &= \delta \left[(1 + u'_X) \cos \theta + u'_Y \sin \theta - Y\theta' - 1 \right] \\
&= \cos \theta \delta u'_X - (1 + u'_X) \sin \theta \delta \theta + \sin \theta \delta u'_Y + u'_Y \cos \theta \delta \theta - Y \delta \theta' \\
&= \cos \theta \delta u'_X + \sin \theta \delta u'_Y + \{ -(1 + u'_X) \sin \theta + u'_Y \cos \theta \} \delta \theta - Y \delta \theta'
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\delta \Gamma_{XY} &= \delta \left[-(1 + u'_X) \sin \theta + u'_Y \theta \right] \\
&= -\sin \theta \delta u'_X - (1 + u'_X) \cos \theta \delta \theta + \cos \theta \delta u'_Y - u'_Y \sin \theta \delta \theta \\
&= -\sin \theta \delta u'_X + \cos \theta \delta u'_Y + \{ -(1 + u'_X) \cos \theta - u'_Y \sin \theta \} \delta \theta
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
E_{XX} \delta E_{XX} &= \left[(1 + u'_X) \cos \theta + u'_Y \sin \theta - Y\theta' - 1 \right] \\
&\quad \left[\cos \theta \delta u'_X + \sin \theta \delta u'_Y + \{ -(1 + u'_X) \sin \theta + u'_Y \cos \theta \} \delta \theta - Y \delta \theta' \right] \\
&= \{ (1 + u'_X) \cos^2 \theta + u'_Y \sin \theta \cos \theta - Y\theta' \cos \theta - \cos \theta \} \delta u'_X \\
&\quad + \{ (1 + u'_X) \cos \theta \sin \theta + u'_Y \sin^2 \theta - Y\theta' \sin \theta - \sin \theta \} \delta u'_Y \\
&\quad + \{ -(1 + u'_X)^2 \cos \theta \sin \theta + (1 + u'_X) u'_Y \cos^2 \theta \} \delta \theta \\
&\quad + \{ -(1 + u'_X) u'_Y \sin^2 \theta + (u'_Y)^2 \sin \theta \cos \theta \} \delta \theta \\
&\quad + \{ (1 + u'_X) \sin \theta Y \theta' - u'_Y \cos \theta Y \theta' \} \delta \theta \\
&\quad + \{ (1 + u'_X) \sin \theta - u'_Y \cos \theta \} \delta \theta \\
&\quad - (1 + u'_X) \cos \theta Y \delta \theta' - u'_Y \sin \theta Y \delta \theta' + Y^2 \theta' \delta \theta' + Y \delta \theta'
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{XY} \delta \Gamma_{XY} &= \left[-(1 + u'_X) \sin \theta + u'_Y \cos \theta \right] \\
&\quad \left[-\sin \theta \delta u'_X + \cos \theta \delta u'_Y + \{ -(1 + u'_X) \cos \theta - u'_Y \sin \theta \} \delta \theta \right] \\
&= \{ (1 + u'_X) \sin^2 \theta - u'_Y \cos \theta \sin \theta \} \delta u'_X \\
&\quad + \{ -(1 + u'_X) \sin \theta \cos \theta + u'_Y \cos^2 \theta \} \delta u'_Y \\
&\quad + \{ (1 + u'_X)^2 \sin \theta \cos \theta + (1 + u'_X) u'_Y \sin^2 \theta \} \delta \theta \\
&\quad + \{ -(1 + u'_X) u'_Y \cos^2 \theta - (u'_Y)^2 \cos \theta \sin \theta \} \delta \theta
\end{aligned} \tag{25}$$

ここで、

$$\int_A dA = A, \quad \int_A Y dA = 0, \quad \int_A Y^2 dA = I \tag{26}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV &= EA \int_L \{(1 + u'_X) \cos^2 \theta + u'_Y \sin \theta \cos \theta - \cos \theta\} \delta u'_X dX \\
&+ EA \int_L \{(1 + u'_X) \cos \theta \sin \theta + u'_Y \sin^2 \theta - \sin \theta\} \delta u'_Y dX \\
&+ EA \int_L \{-(1 + u'_X)^2 \cos \theta \sin \theta + (1 + u'_X) u'_Y \cos^2 \theta\} \delta \theta dX \\
&+ EA \int_L \{-(1 + u'_X) u'_Y \sin^2 \theta + (u'_Y)^2 \sin \theta \cos \theta\} \delta \theta dX \\
&+ EA \int_L \{(1 + u'_X) \sin \theta - u'_Y \cos \theta\} \delta \theta dX \\
&+ EI \int_L \theta' \delta \theta' dX \\
&+ \kappa GA \int_L \{(1 + u'_X) \sin^2 \theta - u'_Y \cos \theta \sin \theta\} \delta u'_X dX \\
&+ \kappa GA \int_L \{-(1 + u'_X) \sin \theta \cos \theta + u'_Y \cos^2 \theta\} \delta u'_Y dX \\
&+ \kappa GA \int_L \{(1 + u'_X)^2 \sin \theta \cos \theta + (1 + u'_X) u'_Y \sin^2 \theta\} \delta \theta dX \\
&+ \kappa GA \int_L \{-(1 + u'_X) u'_Y \cos^2 \theta - (u'_Y)^2 \cos \theta \sin \theta\} \delta \theta dX
\end{aligned} \tag{27}$$

梁要素の端点を 1、2 としたとき、節点変位ベクトル \mathbf{U} と節点力ベクトル \mathbf{f} を次のように定義する。

$$\mathbf{U} = [u_{X1} \quad u_{Y1} \quad \theta_{Z1} \quad u_{X2} \quad u_{Y2} \quad \theta_{Z2}]^T \tag{28}$$

$$\mathbf{f} = [F_{X1} \quad F_{Y1} \quad M_{Z1} \quad F_{X2} \quad F_{Y2} \quad M_{Z2}]^T \tag{29}$$

節点変位 u_X, u_Y, θ は従来の線形な形状関数を使って補間する。

$$u_X = \mathbf{N}_X^T \mathbf{U} \tag{30}$$

$$u_Y = \mathbf{N}_Y^T \mathbf{U} \tag{31}$$

$$\theta = \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{U} \tag{32}$$

$$\mathbf{N}_X = [N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0]^T \tag{33}$$

$$\mathbf{N}_Y = [0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0]^T \tag{34}$$

$$\mathbf{N}_\theta = [0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2]^T \tag{35}$$

$$\xi = \frac{2X}{L} - 1 \tag{36}$$

$$N_1 = \frac{1 - \xi}{2} \tag{37}$$

$$N_2 = \frac{1 + \xi}{2} \tag{38}$$

これらを用いると、 u_X 、 u_Y の第 1 変分は、

$$\delta u_X = \mathbf{N}_X^T \delta \mathbf{U} \quad (39)$$

$$\delta u_Y = \mathbf{N}_Y^T \delta \mathbf{U} \quad (40)$$

$$\delta \theta = \mathbf{N}_\theta^T \delta \mathbf{U} \quad (41)$$

$$\delta u'_X = \mathbf{N}'_X{}^T \delta \mathbf{U} \quad (42)$$

$$\delta u'_Y = \mathbf{N}'_Y{}^T \delta \mathbf{U} \quad (43)$$

$$\delta \theta' = \mathbf{N}'_\theta{}^T \delta \mathbf{U} \quad (44)$$

となる。

これら第 1 変分の X 微分を (28) 式に代入すると、

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \delta \mathbf{U}^T \Phi(\mathbf{U}) \quad (45)$$

と書ける。

したがって梁の剛性方程式 (stiffness equation) は、

$$\Phi(\mathbf{U}) = \mathbf{f} \quad (46)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{U}) = & EA \int_L \{(1 + u'_X) \cos^2 \theta + u'_Y \sin \theta \cos \theta - \cos \theta\} \mathbf{N}'_X dX \\ & + EA \int_L \{(1 + u'_X) \cos \theta \sin \theta + u'_Y \sin^2 \theta - \sin \theta\} \mathbf{N}'_Y dX \\ & + EA \int_L \{-(1 + u'_X)^2 \cos \theta \sin \theta + (1 + u'_X) u'_Y \cos^2 \theta\} \mathbf{N}_\theta dX \\ & + EA \int_L \{-(1 + u'_X) u'_Y \sin^2 \theta + (u'_Y)^2 \sin \theta \cos \theta\} \mathbf{N}_\theta dX \\ & + EA \int_L \{(1 + u'_X) \sin \theta - u'_Y \cos \theta\} \mathbf{N}_\theta dX \\ & + EI \int_L \theta' \mathbf{N}'_\theta dX \\ & + \kappa GA \int_L \{(1 + u'_X) \sin^2 \theta - u'_Y \cos \theta \sin \theta\} \mathbf{N}'_X dX \\ & + \kappa GA \int_L \{-(1 + u'_X) \sin \theta \cos \theta + u'_Y \cos^2 \theta\} \mathbf{N}'_Y dX \\ & + \kappa GA \int_L \{(1 + u'_X)^2 \sin \theta \cos \theta + (1 + u'_X) u'_Y \sin^2 \theta\} \mathbf{N}_\theta dX \\ & + \kappa GA \int_L \{-(1 + u'_X) u'_Y \cos^2 \theta - (u'_Y)^2 \cos \theta \sin \theta\} \mathbf{N}_\theta dX \end{aligned} \quad (47)$$

(46) 式は非線形方程式であり、Newton-Raphson 法で解く。

(47) 式は線形補間 (1 次線要素) を用いるとき shear locking 回避のため積分点 1 点の Gauss 積分 (低減積分) する。

4 接線剛性行列

Newton-Raphson 法を用いると、(46) 式

$$\Phi(\mathbf{U}) = \mathbf{f}$$

は次のように線形化できる。

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = \mathbf{f} - \Phi \quad (48)$$

ここにローカル接線剛性行列 \mathbf{K} は、

$$\mathbf{K} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{U}} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{\partial\Phi_i}{\partial U_j} \\ &= EA \int_L \frac{\partial c_1}{\partial U_j} N'_{X_i} dX + EA \int_L \frac{\partial c_2}{\partial U_j} N'_{Y_i} dX \\ &\quad + EA \int_L \frac{\partial c_3}{\partial U_j} N_{\theta_i} dX + EA \int_L \frac{\partial c_4}{\partial U_j} N_{\theta_i} dX + EA \int_L \frac{\partial c_5}{\partial U_j} N_{\theta_i} dX \\ &\quad + EI \int_L \frac{\partial c_6}{\partial U_j} N'_{\theta_i} dX \\ &\quad + \kappa GA \int_L \frac{\partial c_7}{\partial U_j} N'_{X_i} dX + \kappa GA \int_L \frac{\partial c_8}{\partial U_j} N'_{Y_i} dX \\ &\quad + \kappa GA \int_L \frac{\partial c_9}{\partial U_j} N_{\theta_i} dX + \kappa GA \int_L \frac{\partial c_{10}}{\partial U_j} N_{\theta_i} dX \end{aligned} \quad (50)$$

ここに、

$$c_1 = (1 + u'_X) \cos^2 \theta + u'_Y \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \quad (51)$$

$$c_2 = (1 + u'_X) \cos \theta \sin \theta + u'_Y \sin^2 \theta - \sin \theta \quad (52)$$

$$c_3 = -(1 + u'_X)^2 \cos \theta \sin \theta + (1 + u'_X) u'_Y \cos^2 \theta \quad (53)$$

$$c_4 = -(1 + u'_X) u'_Y \sin^2 \theta + (u'_Y)^2 \sin \theta \cos \theta \quad (54)$$

$$c_5 = (1 + u'_X) \sin \theta - u'_Y \cos \theta \quad (55)$$

$$c_6 = \theta' \quad (56)$$

$$c_7 = (1 + u'_X) \sin^2 \theta - u'_Y \cos \theta \sin \theta \quad (57)$$

$$c_8 = -(1 + u'_X) \sin \theta \cos \theta + u'_Y \cos^2 \theta \quad (58)$$

$$c_9 = (1 + u'_X)^2 \sin \theta \cos \theta + (1 + u'_X) u'_Y \sin^2 \theta \quad (59)$$

$$c_{10} = -(1 + u'_X) u'_Y \cos^2 \theta - (u'_Y)^2 \cos \theta \sin \theta \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_1}{\partial U_j} &= \frac{\partial u'_X}{\partial U_j} \cos^2 \theta - (1 + u'_X) 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad + \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \sin \theta \cos \theta + u'_Y (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j}
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_2}{\partial U_j} &= \frac{\partial u'_X}{\partial U_j} \cos \theta \sin \theta + (1 + u'_X) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad + \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \sin^2 \theta + u'_Y 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad - \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j}
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_3}{\partial U_j} &= -2(1 + u'_X) \frac{\partial u'_X}{\partial U_j} \cos \theta \sin \theta - (1 + u'_X)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad + \frac{\partial u'_X}{\partial U_j} u'_Y \cos^2 \theta + (1 + u'_X) \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \cos^2 \theta - (1 + u'_X) u'_Y 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j}
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_4}{\partial U_j} &= -\frac{\partial u'_X}{\partial U_j} u'_Y \sin^2 \theta - (1 + u'_X) \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \sin^2 \theta - (1 + u'_X) u'_Y 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad + 2u'_Y \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \sin \theta \cos \theta + (u'_Y)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial U_j}
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_5}{\partial U_j} &= \frac{\partial u'_X}{\partial U_j} \sin \theta + (1 + u'_X) \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad - \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \cos \theta + u'_Y \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j}
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\frac{\partial c_6}{\partial U_j} = \frac{\partial \theta'}{\partial U_j} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_7}{\partial U_j} &= \frac{\partial u'_X}{\partial U_j} \sin^2 \theta + (1 + u'_X) 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad - \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \cos \theta \sin \theta - u'_Y (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial U_j}
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_8}{\partial U_j} &= -\frac{\partial u'_X}{\partial U_j} \sin \theta \cos \theta - (1 + u'_X) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad + \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \cos^2 \theta - u'_Y 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j}
\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_9}{\partial U_j} &= 2(1 + u'_X) \frac{\partial u'_X}{\partial U_j} \sin \theta \cos \theta + (1 + u'_X)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad + \frac{\partial u'_X}{\partial U_j} u'_Y \sin^2 \theta + (1 + u'_X) \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \sin^2 \theta + (1 + u'_X) u'_Y 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j}
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_{10}}{\partial U_j} &= -\frac{\partial u'_X}{\partial U_j} u'_Y \cos^2 \theta - (1 + u'_X) \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \cos^2 \theta + (1 + u'_X) u'_Y 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial U_j} \\
&\quad - 2u'_Y \frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} \cos \theta \sin \theta - (u'_Y)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial U_j}
\end{aligned} \tag{70}$$

さらに、

$$\frac{\partial u'_X}{\partial U_j} = N'_{Xj} \quad (71)$$

$$\frac{\partial u'_Y}{\partial U_j} = N'_{Yj} \quad (72)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial U_j} = N_{\theta j} \quad (73)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial U_j} = N'_{\theta j} \quad (74)$$

の関係を用いる。

5 運動エネルギーと慣性力

動的解析の定式化を行う。運動エネルギー K は、

$$K = \frac{1}{2}\rho \left\{ \int_L A(\dot{u}'_X{}^2 + \dot{u}'_Y{}^2)dX + \int_L I_Z\dot{\theta}^2 dX \right\} \quad (75)$$

ここで、

$$\dot{u}_X = \mathbf{N}_X^T \dot{\mathbf{U}} \quad (76)$$

$$\dot{u}_Y = \mathbf{N}_Y^T \dot{\mathbf{U}} \quad (77)$$

$$\dot{\theta} = \mathbf{N}_\theta^T \dot{\mathbf{U}} \quad (78)$$

$$\frac{1}{2}\rho \int_L A\dot{u}'_X{}^2 dX = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}_X \dot{\mathbf{U}} \quad (79)$$

$$\frac{1}{2}\rho \int_L A\dot{u}'_Y{}^2 dX = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}_Y \dot{\mathbf{U}} \quad (80)$$

$$\frac{1}{2}\rho \int_L I_Z\dot{\theta}^2 dX = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}_\theta \dot{\mathbf{U}} \quad (81)$$

$$\mathbf{M}_X = \rho A \int_L \mathbf{N}_X \mathbf{N}_X^T dX \quad (82)$$

$$\mathbf{M}_Y = \rho A \int_L \mathbf{N}_Y \mathbf{N}_Y^T dX \quad (83)$$

$$\mathbf{M}_\theta = \rho I_Z \int_L \mathbf{N}_\theta \mathbf{N}_\theta^T dX \quad (84)$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \quad (85)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_X + \mathbf{M}_Y + \mathbf{M}_\theta \quad (86)$$

(85) 式に Hamilton の原理を適用すると慣性力 Φ_K は、

$$\Phi_K = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (87)$$

したがって、運動方程式は

$$M\ddot{U} + \Phi = f \quad (88)$$

となる。慣性項は線形である。

6 グローバル座標系への変換

グローバル座標系では、参照面 C_0 は X 軸に沿わず、 C_0 のローカル座標系の \bar{X} は、グローバル座標系の X に対して角度 β_0 をなす。

$$\begin{aligned} \cos \beta_0 &= \frac{X_{21}}{L_0} \\ \sin \beta_0 &= \frac{Y_{21}}{L_0} \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} X_{21} &= X_2 - X_1 \\ Y_{21} &= Y_2 - Y_1 \\ L_0 &= \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2} \end{aligned} \quad (90)$$

\bar{U} をローカルな節点値ベクトル、 U をグローバルな節点値ベクトルとすると、

$$\begin{aligned} \bar{U} &= TU \\ U &= T^T \bar{U} \end{aligned} \quad (91)$$

T は直交行列である。

$$\bar{U} = [\bar{u}_{X1} \quad \bar{u}_{Y1} \quad \bar{\theta}_{Z1} \quad \bar{u}_{X2} \quad \bar{u}_{Y2} \quad \bar{\theta}_{Z2}]^T \quad (92)$$

$$\bar{U} = [u_{X1} \quad u_{Y1} \quad \theta_{Z1} \quad u_{X2} \quad u_{Y2} \quad \theta_{Z2}]^T \quad (93)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & \sin \beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta_0 & \sin \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (94)$$

グローバル座標系の剛性方程式への変換

$$\bar{M}\ddot{\bar{U}} + \bar{K}\Delta\bar{U} = \bar{f} - \bar{\Phi} \quad (95)$$

$$\rightarrow T^T \bar{M} T \ddot{U} + T^T \bar{K} T \Delta U = T^T \bar{f} - T^T \bar{\Phi}$$

$$\rightarrow M\ddot{U} + K\Delta U = f - \Phi \quad (96)$$

$$M = T^T \bar{M} T \quad (97)$$

$$K = T^T \bar{K} T \quad (98)$$

$$f = T^T \bar{f} \quad (99)$$

$$\Phi = T^T \bar{\Phi} \quad (100)$$

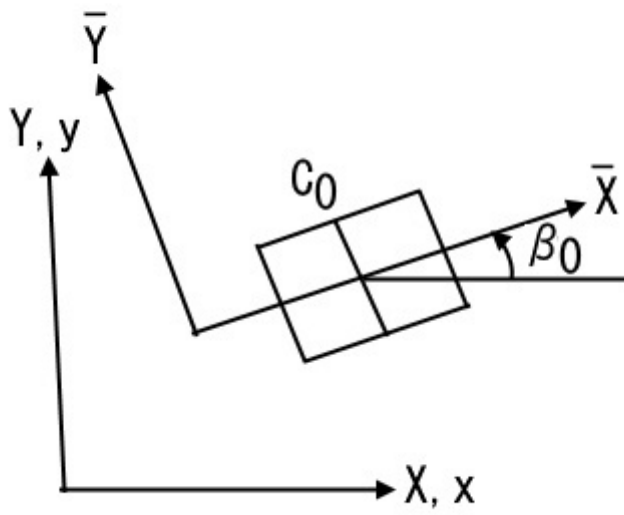


图 2 Global 座標系

7 まとめ

幾何学的非線形を扱うために、Timoshenko 梁を Total Lagrange 法で定式化した。
Euler-Bernoulli 梁のような field-consistent な補間関数はいずれ従来 of 線形補間を用いて解析できる。ただし、shear locking を回避するために低減積分する必要がある。

8 参考文献

[1] Carlos A. Felippa, "The TL Timoshenko Plane Beam Element", Nonlinear Finite Element Methods, Chapter 9, Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder, Fall, 2004