# Timoshenko Co-rotational Beam(Frame) Formulation

ryujimiya

2020 年 04 月 24 日

## 1　はじめに

「Co-rotational Beam(Frame) Formulation」では、shallow arch を Euler-Bernoulli の仮定の下で解いた。本書では、Timoshenko Beam(Frame) に対して Co-rotational 定式化を適用する。

## 2　Timoshenko Co-rotional Beam(Frame) の kinematics

節点 1、2 のグローバル座標系 $(x, y)$ の座標を $(x_1, y_1)$、$(x_2, y_2)$ とする。
グローバル変位ベクトル

$$\boldsymbol{p}_g = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

ローカル変位ベクトル

$$\boldsymbol{p}_l = \begin{bmatrix} \overline{u} & \overline{\theta}_1 & \overline{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

$\boldsymbol{p}_l$ の成分は次より計算できる。

$$\overline{u} = l_n - l_0 \tag{3}$$
$$\overline{\theta}_1 = \theta_1 - \alpha \tag{4}$$
$$\overline{\theta}_2 = \theta_2 - \alpha \tag{5}$$

ここに、$l_0$、$l_n$ は初期及び現在の要素の長さ

$$l_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{6}$$
$$l_n = \sqrt{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2} \tag{7}$$

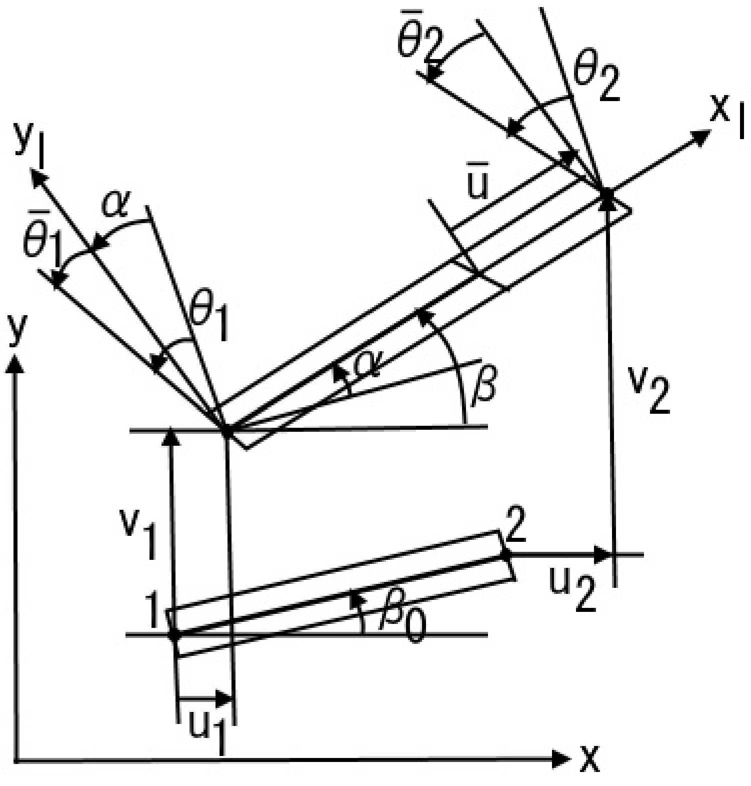


図 1　Timoshenko Co-rotational Beam

$\alpha$ は剛体回転で、

$$\alpha = \beta - \beta_0 \tag{8}$$

Euler-Bernoulli shallow arch では $\theta$ が中立軸の傾きであったが Timoshenko 梁では $\theta$ が断面の傾きになっている。しかしながら $\theta$ の定義は異なるものの Euler-Bernoulli shallow arch と Timoshenko では同じ式が成立している。
よって「Co-rotational Beam(Frame) Formulation」で示したの定式化をそのまま用いることができる。本書では Timoshenko 梁への変更箇所を記す。

# 3 ローカルひずみ内力とローカル接線剛性行列

Timoshenko 梁についてローカルひずみ内力とローカル接線行列を求める。
ローカル co-rotational 座標系 $u, v, \theta$ を線形補間する。

$$u = N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 \tag{9}$$
$$v = N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 \tag{10}$$
$$\theta = N_1\overline{\theta}_1 + N_2\overline{\theta}_2 \tag{11}$$
$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2x}{l_0} - 1\\ N_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi)\\ N_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi)\end{aligned} \tag{12}$$

co-rotational の定式化では、

$$\begin{aligned}\overline{u}_1 &= 0\\ \overline{u}_2 &= \overline{u}\\ \overline{v}_1 &= \overline{v}_2 = 0\end{aligned}$$

であるから次式となる。

$$u = \frac{x}{l_0}\overline{u} \tag{13}$$
$$v = 0 \tag{14}$$
$$\theta = \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\overline{\theta}_1 + \frac{x}{l_0}\overline{\theta}_2 \tag{15}$$

軸ひずみ $\epsilon$、せん断ひずみ $\gamma$、曲率 $k$ は、

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{\overline{\theta}_2 - \overline{\theta}_1}{l_0} \qquad (16) \\
\epsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} - ky \\
&= \frac{\overline{u}}{l_0} - \frac{\overline{\theta}_2 - \overline{\theta}_1}{l_0} y \qquad (17) \\
\gamma &= \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \\
&= -\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \overline{\theta}_1 - \frac{x}{l_0} \overline{\theta}_2 \qquad (18)
\end{aligned}
$$

仮想仕事と内力の関係は、

$$
V = \int_v \sigma \delta \epsilon dv = N \delta \overline{u} + M_1 \delta \overline{\theta}_1 + M_2 \delta \overline{\theta}_2 \qquad (19)
$$

ここで、$E$:Young 率、$G$ : せん断係数、$\kappa$:せん断補正係数 (Timoshenko せん断係数) とすると、

$$
\delta \epsilon = \frac{\delta \overline{u}}{l_0} - \frac{\delta \overline{\theta}_2 - \delta \overline{\theta}_1}{l_0} y \qquad (20)
$$

$$
\delta \gamma = -\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \delta \overline{\theta}_1 - \frac{x}{l_0} \delta \overline{\theta}_2 \qquad (21)
$$

$$
\sigma = E \epsilon, \quad \delta \sigma = E \delta \epsilon \qquad (22)
$$

$$
\tau = \kappa G \gamma, \quad \delta \tau = \kappa G \delta \gamma \qquad (23)
$$

したがって内力 $\boldsymbol{f}_l = \begin{bmatrix} N & M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T$ は、

$$
N = \int_v \frac{\sigma}{l_0} dv \qquad (24)
$$

$$
M_1 = \int_v \left\{ \frac{\sigma}{l_0} y - \tau \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \right\} dv \qquad (25)
$$

$$
M_2 = \int_v \left( -\frac{\sigma}{l_0} y - \tau \frac{x}{l_0} \right) dv \qquad (26)
$$

積分は 1 点 Gauss 積分を用い、shear locking を回避する。
内力の微分を求めると、

$$\delta N = \frac{1}{l_0} \int_v \delta\sigma dv \tag{27}$$

$$\delta M_1 = \frac{1}{l_0} \int_v \delta\sigma y dv - \int_v \delta\tau \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) dv \tag{28}$$

$$\delta M_2 = -\frac{1}{l_0} \int_v \delta\sigma y dv - \int_v \delta\tau \frac{x}{l_0} dv \tag{29}$$

$$\int_v \sigma dv = EA \frac{\overline{u}}{l_0} \int_{l_0} dx + E \int_A y dA \frac{\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2}{l_0} \int_{l_0} dx \tag{30}$$

$$\int_v \sigma y dv = E \frac{\overline{u}}{l_0} \int_A y dA \int_{l_0} dx + E \int_A y^2 dA \frac{\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2}{l_0} \int_{l_0} dx \tag{31}$$

$$\int_v \tau dv = \kappa GA \int_{l_0} \left\{ - \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \overline{\theta}_1 - \frac{x}{l_0} \overline{\theta}_2 \right\} dx \tag{32}$$

ローカル接線剛性行列 $\boldsymbol{K}_l$ は、

$$
\begin{aligned}
K_{l11} &= \frac{\partial N}{\partial \overline{u}} \\
&= \frac{EA}{l_0^2} \int_v dx \qquad (33) \\
K_{l12} &= \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_1} \\
&= \frac{E}{l_0^2} \int_A y dA \int_{l_0} dx \qquad (34) \\
K_{l13} &= \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_2} \\
&= -\frac{E}{l_0^2} \int_A y dA \int_{l_0} dx \qquad (35) \\
K_{l21} &= \frac{\partial M_1}{\partial \overline{u}} \\
&= K_{l12} \qquad (36) \\
K_{l22} &= \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_1} \\
&= \frac{E}{l_0^2} \int_A y^2 dA \int_{l_0} dx + \kappa GA \int_{l_0} \left( 1 - \frac{x}{l_0} \right)^2 dx \qquad (37) \\
K_{l23} &= \frac{\partial M_1}{\partial \bar{\theta}_2} \\
&= -\frac{E}{l_0^2} \int_A y^2 dA \int_{l_0} dx + \kappa GA \int_{l_0} \frac{x}{l_0} \left( 1 - \frac{x}{l_0} \right) dx \qquad (38) \\
K_{l31} &= \frac{\partial M_2}{\partial \overline{u}} \\
&= K_{l13} \qquad (39) \\
K_{l32} &= \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_1} \\
&= K_{l23} \qquad (40) \\
K_{l33} &= \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2} \\
&= \frac{E}{l_0^2} \int_A y^2 dA \int_{l_0} dx + \kappa GA \int_{l_0} \left( \frac{x}{l_0} \right)^2 dx \qquad (41)
\end{aligned}
$$

# 4　ローカル慣性力とローカル接線質量行列

Timoshenko 梁の場合、

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= N_1 \dot{\bar{u}}_1 + N_2 \dot{\bar{u}}_2 \\
\dot{v} &= N_1 \dot{\bar{v}}_1 + N_2 \dot{\bar{v}}_2 \\
\dot{\theta} &= N_1 \dot{\bar{\theta}}_1 + N_2 \dot{\bar{\theta}}_2 \qquad (42)
\end{aligned}
$$

運動エネルギー $K$ は、

$$K = \frac{1}{2}\rho \left\{ \int_{l_0} A(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx + \int_{l_0} I_z \dot{\theta}^2 dx \right\} \tag{43}$$

$K$ の第 1 項は、

$$\frac{1}{2}\rho \int_{l_0} A(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{p}}_l^T \boldsymbol{M}_{l1} \dot{\boldsymbol{p}}_l \tag{44}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_l = \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}}_1 & \dot{\bar{v}}_1 & \dot{\bar{\theta}}_1 & \dot{\bar{u}}_2 & \dot{\bar{v}}_2 & \dot{\bar{\theta}}_2 \end{bmatrix}^T \tag{45}$$

$$\boldsymbol{M}_{l1} = \frac{\rho A l_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$K$ の第 2 項は、

$$\frac{1}{2}\rho \int_{l_0} I_z \dot{\theta}^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{p}}_l^T \boldsymbol{M}_{l2} \dot{\boldsymbol{p}}_l \tag{47}$$

$$\boldsymbol{M}_{l2} = \frac{\rho I_z l_0}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \tag{48}$$

よって、

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\rho \left\{ \int_{l_0} A(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx + \int_{l_0} I_z \dot{\theta}^2 dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{p}}_l^T \boldsymbol{M}_l \dot{\boldsymbol{p}}_l \end{aligned} \tag{49}$$

$$\boldsymbol{M}_l = \boldsymbol{M}_{l1} + \boldsymbol{M}_{l2} \tag{50}$$

# 5 まとめ

Co-rotational formulation(「Co-rotational Beam(Frame) Formulation」参照) を Timoshenko 梁に適用した。

# 6 参考文献

[1] Thanh-Nam Le, Jean-Marc Battini, Mohammed Hjiaj, "Efficient dynamic formulation for corotational 2D beams", Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2011

Leuven, Belgium, 4-6 July 2011

[2] Jean-Marc Battini, "Co-rotational beam elements in instability problems", Technical Reports from Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, SE-100 44 Stockholm, Sweden, January 2002