

Timoshenko Beam and Frame Elements

ryujimiya

2020年03月27日

1 はじめに

「Truss, Beam and Frame Elements」でトラス、一方向ビーム、フレーム要素を定式化した。ここで用いた梁は Euler-Bernoulli 梁だった。

本書では Timoshenko 梁に対応する一方向ビーム要素、フレーム要素を定式化する。

本書で扱うのは 2次元 (軸方向 x , 断面 y) である Planar 要素であり、3次元 (軸方向 x , 断面 y, z) である Space 要素は扱わない。

2 Timoshenko Beam

2.1 変位、ひずみ、応力

断面は変形しないとする ($\epsilon_{yy} = 0, \epsilon_{yz} = 0$)。

Timoshenko 梁では、変形前の中立軸に垂直な断面 (平面) は変形後も平面を保つと仮定する。(Euler-Bernoulli の垂直平面保持から垂直条件を除いた仮定である。)

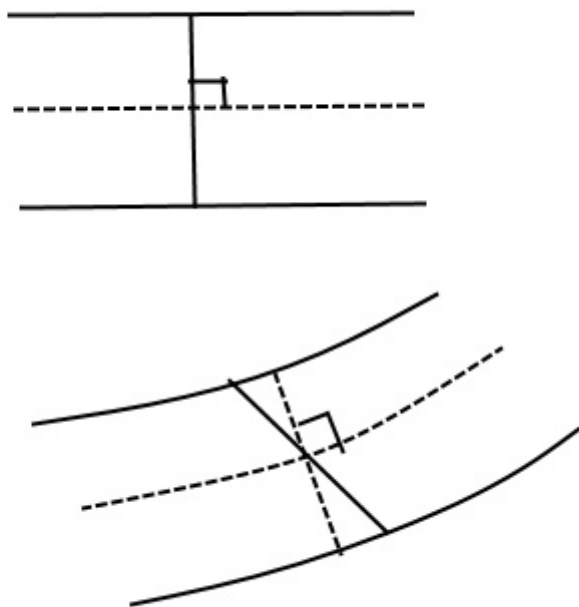


图 1 Timoshenko Beam

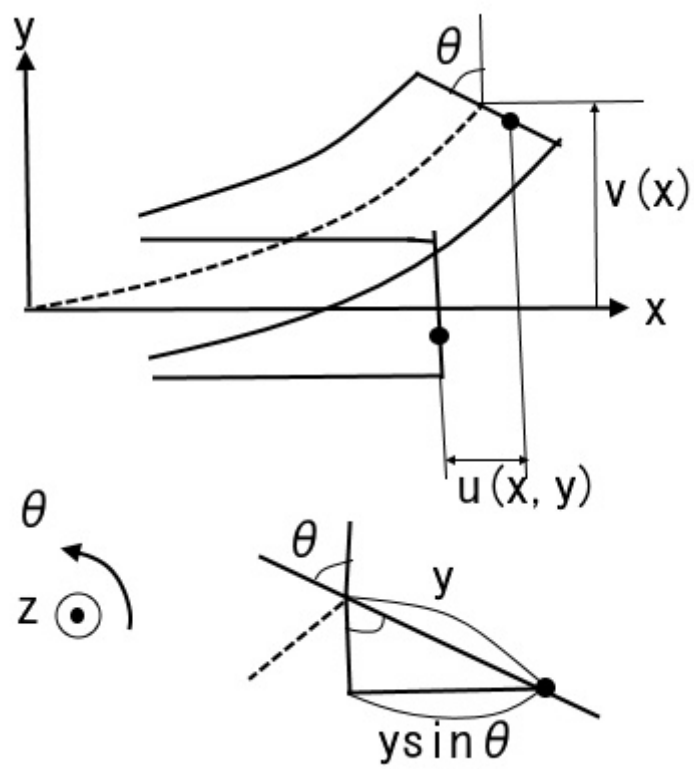


图2 Timoshenko Beam

x 方向の変位 $u(x, y)$ は、

$$u(x, y) = -y \sin \theta \simeq -y\theta(x) \quad (1)$$

ここに、 θ は z 軸周りの回転角である。

y 方向の変位 $v(x, y)$ は、

$$v(x, y) = v(x) \quad (2)$$

ひずみを求める。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(-y\theta(x)) \\ &= -y \frac{d\theta(x)}{dx} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\epsilon_{yy} = 0 \quad (v = v(x) \text{ より}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -\theta(x) + \frac{dv(x)}{dx} \end{aligned} \quad (5)$$

Timoshenko 梁では $\gamma_{xy} \neq 0$ であり、せん断ひずみが生じる。

応力は、

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = -Ey \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (6)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (7)$$

$$\sigma_{xy} = \kappa G \gamma_{xy} = \kappa \left(-\theta(x) + \frac{dv(x)}{dx} \right) \quad (8)$$

ここに、 κ は Timoshenko shear coefficient、or せん断補正係数で、長方形断面のとき、 $\kappa = \frac{5}{6}$ が用いられる。

断面力は、

$$\begin{aligned}
N &= \int_A \sigma_{xx} dA \\
&= \int_A \left(-Ey \frac{d\theta(x)}{dx} \right) dA \\
&= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \int_A \sigma_{xy} dA \\
&= \int_A \kappa G \left(-\theta(x) + \frac{dv(x)}{dx} \right) dA \\
&= \kappa G A \left(-\theta(x) + \frac{dv(x)}{dx} \right)
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
M &= - \int_A \sigma_{xx} y dA \\
&= - \int_A \left(-Ey \frac{d\theta(x)}{dx} \right) y dA \\
&= E \int_A y^2 dA \frac{d\theta(x)}{dx} \\
&= EI_z \frac{d\theta(x)}{dx}
\end{aligned} \tag{11}$$

ここに、 I_z は z 軸周りの断面 2 次モーメントであり、

$$I_z = \int_A y^2 dA \tag{12}$$

2.2 梁の汎関数、弱形式と支配方程式

Hamilton の原理は、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{13}$$

Lagrangian functional L は、外力がないとすると、

$$L = T - \Pi \tag{14}$$

である。ここに、 T は kinetic energy、 Π は potential energy(ここでは elastic strain energy) である。梁のひずみのエネルギー Π は、

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} dV \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \int_A \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \int_A E \epsilon_{xx}^2 + \kappa G \gamma_{xy}^2 dA dx \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \int_A E \left(-y \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \kappa G \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right)^2 dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \int_A E y^2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \kappa G A \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right)^2 dA dx$$

$$= \frac{1}{2} E I_z \int_0^{l_e} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \kappa G A \int_0^{l_e} \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (17)$$

梁の運動エネルギーは、y 方向の運動と z 軸周りの回転運動のエネルギーであり、

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{v} \dot{v} dV + \frac{1}{2} \int_V \rho r^2 \dot{\theta} \dot{\theta} dV \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \int_0^{l_e} \dot{v} \dot{v} dx + \frac{1}{2} \rho \int_A y^2 dA \int_0^{l_e} \dot{\theta} \dot{\theta} dx$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \int_0^{l_e} \dot{v} \dot{v} dx + \frac{1}{2} \rho I_z \int_0^{l_e} \dot{\theta} \dot{\theta} dx \quad (19)$$

Hamilton の原理 (1) 式の左辺は、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi dt \quad (20)$$

(20) 式の第 2 項は、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \Pi \quad (21)$$

$$\delta \Pi = \int_0^{l_e} E I_z \frac{d\delta\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \kappa G A \left(-\delta\theta + \frac{d\delta v}{dx} \right) \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right) dx + \delta v Q \Big|_{x=0}^{l_e} + \delta \theta M \Big|_{x=0}^{l_e} \quad (22)$$

(22) 式の第 1 項は、

$$\frac{d\delta\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\delta\theta \frac{d\theta}{dx} \right) - \delta\theta \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (23)$$

第 2 項は、

$$\left(-\delta\theta + \frac{d\delta v}{dx} \right) \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right) = \delta\theta \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) + \frac{d\delta v}{dx} \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \quad (24)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^{l_e} EI_z \frac{d\delta\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \kappa GA \left(-\delta\theta + \frac{d\delta v}{dx} \right) \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right) dx \\
&= EI_z \int_0^{l_e} \frac{d}{dx} \left(\delta\theta \frac{d\theta}{dx} \right) - \delta\theta \frac{d^2\theta}{dx^2} dx + \kappa GA \int_0^{l_e} \delta\theta \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) + \frac{d\delta v}{dx} \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) dx \\
&= \int_0^{l_e} \delta\theta \left\{ -EI_z \frac{d^2\theta}{dx^2} + \kappa GA \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \right\} dx + \int_0^{l_e} \frac{d\delta v}{dx} \left\{ \kappa GA \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \right\} dx + \int_0^{l_e} \frac{d}{dx} \left(\delta\theta EI_z \frac{d\theta}{dx} \right) dx \\
&= \int_0^{l_e} \delta\theta \left\{ -EI_z \frac{d^2\theta}{dx^2} + \kappa GA \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \right\} dx + \int_0^{l_e} \frac{d\delta v}{dx} Q dx + \int_0^{l_e} \frac{d}{dx} (\delta\theta M) \quad (25)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{d\delta v}{dx} Q = \frac{d}{dx} (\delta v Q) - \delta v \frac{dQ}{dx}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^{l_e} \delta\theta \left\{ -EI_z \frac{d^2\theta}{dx^2} + \kappa GA \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \right\} dx + \int_0^{l_e} \frac{d}{dx} (\delta v Q) - \delta v \frac{dQ}{dx} dx + \int_0^{l_e} \frac{d}{dx} (\delta\theta M) dx \\
&= \int_0^{l_e} \delta\theta \left\{ -EI_z \frac{d^2\theta}{dx^2} + \kappa GA \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \right\} dx + \int_0^{l_e} \delta v \left(-\frac{dQ}{dx} \right) dx + \delta v Q \Big|_{x=0}^{l_e} + \delta\theta M \Big|_{x=0}^{l_e} \quad (26)
\end{aligned}$$

(20) 式の第 1 項は、

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \rho A \int_0^{l_e} \dot{v} \dot{v} dx + \frac{1}{2} \rho I_z \int_0^{l_e} \dot{\theta} \dot{\theta} dx \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\rho A \int_0^{l_e} \delta \dot{v} \dot{v} dx + \rho I_z \int_0^{l_e} \delta \dot{\theta} \dot{\theta} dx \right) dt
\end{aligned}$$

ここで、

$$\dot{f} \dot{g} = (f \dot{g}) - f \ddot{g}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho A \int_0^{l_e} (\delta v \dot{v}) dx - \rho A \int_0^{l_e} \delta v \ddot{v} dx + \rho I_z \int_0^{l_e} (\delta \theta \dot{\theta}) dx - \rho I_z \int_0^{l_e} \delta \theta \ddot{\theta} dx \right\} dt \\
&= \rho A \int_0^{l_e} (\delta v \dot{v}) dx \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho A \int_0^{l_e} \delta v \ddot{v} dx dt + \rho I_z \int_0^{l_e} (\delta \theta \dot{\theta}) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho I_z \int_0^{l_e} \delta \theta \ddot{\theta} dx dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(-\rho A \int_0^{l_e} \delta v \ddot{v} dx - \rho I_z \int_0^{l_e} \delta \theta \ddot{\theta} dx \right) dt \quad (27)
\end{aligned}$$

ただし、開始、終了時刻では静的な状態として、 $t = t_1$ 、 $t = t_2$ で $\delta v = 0$ 、 $\delta \theta = 0$ を用いた。

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi \text{ right}) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(-\rho A \int_0^{l_e} \delta v \ddot{v} dx - \rho I_z \int_0^{l_e} \delta \theta \ddot{\theta} dx \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_0^{l_e} \delta \theta \left\{ -EI_z \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \kappa GA \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \right\} dx + \int_0^{l_e} \delta v \left(-\frac{dQ}{dx} \right) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta v Q \Big|_{x=0} + \theta M \Big|_{x=0} \right] \right) dt \end{aligned} \quad (28)$$

$$= 0 \quad (\text{Hamilton の原理}) \quad (29)$$

(29) 式が成り立つためには (28) 式右辺の t の被積分関数が 0 にならなければならない。

$$\begin{aligned} &-\rho A \int_0^{l_e} \delta v \ddot{v} dx - \rho I_z \int_0^{l_e} \delta \theta \ddot{\theta} dx \\ &- \left[\int_0^{l_e} \delta \theta \left\{ -EI_z \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \kappa GA \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \right\} dx + \int_0^{l_e} \delta v \left(-\frac{dQ}{dx} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \delta v Q \Big|_{x=0} + \delta \theta M \Big|_{x=0} \right] = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

(30) 式において δv 、 $\delta \theta$ が任意であるから、次式の支配方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} -\rho I_z \ddot{\theta} - \left[-EI_z \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \kappa GA \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \right] &= 0 \\ -\rho A \ddot{v} - \left[-\frac{dQ}{dx} \right] &= 0 \end{aligned}$$

or

$$\rho I_z \ddot{\theta} - EI_z \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \kappa GA \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) = 0 \quad (31)$$

$$\rho A \ddot{v} - \frac{dQ}{dx} = 0 \quad \text{or} \quad \rho A \ddot{v} - \kappa GA \left(-\frac{d\theta}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = 0 \quad (32)$$

(31) 式は回転の運動方程式、(32) 式は運動方程式である。

自然境界条件は、

$$Q = 0 \quad (33)$$

$$M = 0 \quad (34)$$

である。

(31) 式、(32) 式は、 Q 、 M のみで表すと、

$$\rho I_z \ddot{\theta} - \frac{dM}{dx} - Q = 0 \quad (35)$$

$$\rho A \ddot{v} - \frac{dQ}{dx} = 0 \quad (36)$$

である。

弱形式は、 T の変分を含む (29) 式、 Π の (17) 式の変分をとった式から直ちに導かれる。

$$\begin{aligned}
& -\rho A \int_0^{l_e} \delta v \ddot{v} dx - \rho I_z \int_0^{l_e} \delta \theta \ddot{\theta} dx \\
& - \left[EI_z \int_0^{l_e} \frac{d\delta\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} dx + \kappa GA \int_0^{l_e} \left(-\delta\theta + \frac{d\delta v}{dx} \right) \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right) dx \right] = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

or

$$\begin{aligned}
& \rho A \int_0^{l_e} \delta v \ddot{v} dx + \rho I_z \int_0^{l_e} \delta \theta \ddot{\theta} dx \\
& + EI_z \int_0^{l_e} \frac{d\delta\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} dx + \kappa GA \int_0^{l_e} \left(-\delta\theta + \frac{d\delta v}{dx} \right) \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right) dx = 0
\end{aligned} \tag{38}$$

2.3 要素マトリクス

弱形式 (38) 式：

$$\begin{aligned}
& \rho A \int_0^{l_e} \delta v \ddot{v} dx + \rho I_z \int_0^{l_e} \delta \theta \ddot{\theta} dx \\
& + EI_z \int_0^{l_e} \frac{d\delta\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} dx + \kappa GA \int_0^{l_e} \left(-\delta\theta + \frac{d\delta v}{dx} \right) \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right) dx = 0
\end{aligned}$$

いま、梁を線要素で分割し、

$$\begin{aligned}
v &= N_j^v v_j \\
\theta &= N_j^\theta \theta_j
\end{aligned} \tag{39}$$

と補間する。要素間で連続であればよいので、 N_j^v 、 N_j^θ は Lagrange スカラー形状関数でよい。

ただし、shear locking が発生するので、1 次要素のとき積分点 1 点の数値積分（低減積分）する。

要素剛性マトリクスを求める。

$$\int_0^{l_e} EI_z \frac{d\delta\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} dx = \{\delta\theta\}^T [K_e^{\theta\theta 1}] \{\theta\} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{l_e} \kappa GA \left(-\delta\theta + \frac{d\delta v}{dx} \right) \left(-\theta + \frac{dv}{dx} \right) dx \\
& = \{\delta\theta\}^T [K_e^{\theta\theta 2}] \{\theta\} + \{\delta\theta\}^T [K_e^{\theta v}] \{v\} + \{\delta v\}^T [K_e^{v\theta}] \{\theta\} + \{\delta v\}^T [K_e^{vv}] \{v\}
\end{aligned} \tag{41}$$

$$[K_e^{\theta\theta 1}]_{ij} = EI_z \int_0^{l_e} N_i^\theta N_j^\theta dx \tag{42}$$

$$[K_e^{\theta\theta 2}]_{ij} = \kappa GA \int_0^{l_e} N_i^\theta N_j^\theta dx \tag{43}$$

$$[K_e^{\theta v}]_{ij} = -\kappa GA \int_0^{l_e} N_i^\theta \frac{dN_j^v}{dx} dx \tag{44}$$

$$[K_e^{v\theta}]_{ij} = -\kappa GA \int_0^{l_e} \frac{dN_i^v}{dx} N_j^\theta dx \quad (45)$$

$$[K_e^{vv}]_{ij} = \kappa GA \int_0^{l_e} \frac{dN_i^v}{dx} \frac{dN_j^v}{dx} dx \quad (46)$$

質量マトリクスを求める。

$$\int_0^{l_e} \rho I_z \delta \theta \ddot{\theta} dx = \{\delta \theta\}^T [M_e^{\theta\theta}] \{\ddot{\theta}\} \quad (47)$$

$$\int_0^{l_e} \rho A \delta v v dx = \{\delta v\}^T [M_e^{vv}] \{\ddot{v}\} \quad (48)$$

$$[M_e^{\theta\theta}] = \int_0^{l_e} \rho I_z N_i^\theta N_j^\theta dx \quad (49)$$

$$[M_e^{vv}] = \int_0^{l_e} \rho A N_i^v N_j^v dx \quad (50)$$

要素マトリクスを用いると弱形式は次式となる。

$$[K_e] \{d\} + [M_e] \{\ddot{d}\} = \{f\} \quad (51)$$

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_e^{vv}] & [K_e^{v\theta}] \\ [K_e^{\theta v}] & [K_e^{\theta\theta 1}] + [K_e^{\theta\theta 2}] \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} [M_e^{vv}] & 0 \\ 0 & [M_e^{\theta\theta}] \end{bmatrix} \quad (53)$$

静的解析の場合は、 \ddot{d} の項が消滅する。

動的解析の場合は、Newmark β を用いれば、 \ddot{d} は d を用いて表すことができる。

3 Timoshenko Planar Frame

「Truss, Beam and Frame Elements」で記した Planar Frame の Beam 部分を Timoshenko Beam に置き換えればよい。概要を示す。

Local 座標系を (x,y)、Global 座標系を (X,Y) とする。

Local 節点 1 の自由度は u_1, v_1, θ_{z1} の 3 自由度であり、これに対応する Global 節点 i の自由度は、X、Y 方向変位と Z 軸周り回転、 $D_{3i-2}, D_{3i-1}, D_{3i}$ の 3 自由度である。

$$\{d\} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\{D\} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{3i-2} \\ D_{3i-1} \\ D_{3i} \\ D_{3j-2} \\ D_{3j-1} \\ D_{3j} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Local-Global 座標系変換行列 $[T]$ は、

$$[T] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & & & & & \\ l_y & m_y & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & l_x & m_x & & \\ & & & l_y & m_y & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Truss } u_1 \\ \text{Beam } v_1 \\ \text{Beam } \theta_1 \\ \text{Truss } u_2 \\ \text{Beam } v_2 \\ \text{Beam } \theta_2 \end{array} \quad (56)$$

$$l_x = \cos(x, X) = \frac{X_j - X_i}{l_e}$$

$$m_x = \cos(x, Y) = \frac{Y_j - Y_i}{l_e}$$

$$m_y = \cos(y, X) = -\frac{Y_j - Y_i}{l_e}$$

$$l_y = \cos(y, Y) = \frac{X_j - X_i}{l_e} \quad (57)$$

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (58)$$

これを用いると、

$$\{d\} = [T]\{D\} \quad (59)$$

Global 座標系の要素マトリクスは、

$$[K_e] = [T]^T [k_e] [T] \quad (60)$$

$$[M_e] = [T]^T [m_e] [T] \quad (61)$$

$$[F_e] = [T]^T \{f_e\} \quad (62)$$

4 まとめ

Timoshenko 梁に対応する（一方向）ビーム、フレーム要素の定式化を行った。

5 参考文献

[1] Alireza Khorshidi, "FEA Project Finite Element Analysis of a Timoshenko Beam", Instructor: Prof. Bower, School of Engineering Brown University, Nov, 2012

[2] Yong-Woo Kim, Seung Chan Cha, "Finite element formulation and analysis of Timoshenko beam excited by transversely fluctuating supports due to a real seismic wave", Nuclear Engineering and Technology 50, April 2018