St Venant-Kifchhoff Hyperelastic Model Analysis by Total Lagrangian FEM

ryujimiya

2020 年 06 月 05 日

1　はじめに

St Venant-Kirchhoff 超弾性体に対して Total Lagrange 法を用いた FEM 定式化を行う。

2　Total Lagrange 法

第 2Piola Kirchhoff 応力を用いた弱形式は、

$$\int_V \delta \boldsymbol{u} \rho_0 \left. \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{X}} dV + \int_V \boldsymbol{S} : \delta \boldsymbol{E} dV = \int_V \delta \boldsymbol{u} \rho_0 \boldsymbol{g} dV + \int_S \tilde{\boldsymbol{t}} \delta \boldsymbol{u} dS \tag{1}$$

$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル、$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトル、ρ_0 は密度、$\boldsymbol{S}$ は第 2Piola Kirchhoff 応力テンソル、$\boldsymbol{E}$ は Green-Lagrange のひずみテンソル、$\boldsymbol{g}$ は加速度ベクトル、$\tilde{\boldsymbol{t}}$ は外力の応力ベクトルである。
右辺第二項は、

$$\int_V \boldsymbol{S} : \delta \boldsymbol{E} dV = Q_i^a \delta u_i^a \tag{2}$$

Q_i^aを内力ベクトルと呼ぶ。
$\delta \overline{\boldsymbol{E}}$ を次のように定義する。

$$\delta \overline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}^T \delta \boldsymbol{F} \tag{3}$$

ここで、$\boldsymbol{F}$ は変形勾配テンソルであり、成分表示すると、

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \tag{4}$$

$$\delta F_{ij} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \tag{5}$$

である。
そうすると、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} : \delta\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{S} : \frac{1}{2}\left(\delta\overline{\boldsymbol{E}} + \delta\overline{\boldsymbol{E}}^T\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S} : \delta\overline{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{S} : \delta\boldsymbol{E}^T\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S} : \delta\overline{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{S}^T : \delta\boldsymbol{E}^T\right) \qquad\qquad (\boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{S}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S} : \delta\overline{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{S} : \delta\overline{\boldsymbol{E}}\right) \qquad\qquad (\boldsymbol{A}^T : \boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}) \\
&= \boldsymbol{S} : \delta\overline{\boldsymbol{E}} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$\delta\overline{\boldsymbol{E}}$ を成分表示すると、

$$
\begin{aligned}
\delta\overline{E}_{ij} &= F_{hi}\delta F_{hj} \\
&= \left(\delta_{hi} + \frac{\partial u_h}{\partial X_i}\right)\frac{\partial \delta u_h}{\partial X_j} \\
&= \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_h}{\partial X_j}\frac{\partial u_h}{\partial X_i}
\end{aligned}
$$

δu の添え字が i になるように添え字を入れ替えると、

$$
\delta\overline{E}_{gh} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}\delta_{ig} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}\frac{\partial u_i}{\partial X_g} \qquad (7)
$$

$\delta\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{u}$ が次のように離散化されているとする。

$$
\begin{aligned}
\delta u_i &= N^p \delta u_i^p \\
u_i &= N^r u_i^r \qquad (8)
\end{aligned}
$$

ただし、全体節点番号 a、b は要素内節点番号 p、q に対応するものとする。

そうすると、

$$
\begin{aligned}
\delta\overline{E}_{gh} &= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\delta u_i^p \delta_{ig} + \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\delta u_i^p \frac{\partial N^r}{\partial X_g} u_i^r \\
&= \left(\frac{\partial N^p}{\partial X_h}\delta_{ig} + \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\frac{\partial N^r}{\partial X_g} u_i^r\right)\delta u_i^p \\
&= B_{pigh}\delta u_i^p \qquad (9) \\
B_{pigh} &= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\delta_{ig} + \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\frac{\partial N^r}{\partial X_g} u_i^r \qquad (10) \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\left(\delta_{ig} + \frac{\partial N^r}{\partial X_g} u_i^r\right) \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\left(\delta_{ig} + \frac{\partial u_i}{\partial X_g}\right) \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}F_{ig} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

これを用いると要素内の内力は次のように書ける。

$$Q^p_{ei} = \int_{V_e} S_{gh} B_{pigh} dV \tag{12}$$

内力はこれを要素毎に足し合わせたものであり、

$$Q^a_i = \sum_e Q^a_{ei} \tag{13}$$

また、

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_h}{\partial X_i}\frac{\partial u_h}{\partial X_j}\right) \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\delta E_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_h}{\partial X_i}\frac{\partial u_h}{\partial X_j} + \frac{\partial u_h}{\partial X_i}\frac{\partial \delta u_h}{\partial X_j}\right) \\
\delta E_{gh} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_g}{\partial X_h} + \frac{\partial \delta u_h}{\partial X_g} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_g}\frac{\partial u_i}{\partial X_h} + \frac{\partial u_i}{\partial X_g}\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}\right) & (15) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}\left(\delta_{ig} + \frac{\partial u_i}{\partial X_g}\right) + \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_g}\left(\delta_{ih} + \frac{\partial u_i}{\partial X_h}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}F_{ig} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_g}F_{ih}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N^p}{\partial X_h}F_{ig} + \frac{\partial N^p}{\partial X_g}F_{ih}\right)\delta u^p_i \\
&= \frac{1}{2}\left(B_{pigh} + B_{pihg}\right)\delta u^p_i & (16)
\end{aligned}$$

ここで、δu^p_i は任意だから、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{gh}}{\partial u^p_i} &= \frac{1}{2}\left(B_{pigh} + B_{pihg}\right) & (17) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{E}_{gh}}{\partial u^p_i} + \frac{\partial \overline{E}_{hg}}{\partial u^p_i}\right) \qquad \text{((9) 式より)} & (18)
\end{aligned}$$

Newton-Raphson 法を用いると、(1) 式は、

$$\begin{aligned}
&\int_V \delta \boldsymbol{u}\rho_0 \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dV + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}\int_V \boldsymbol{S} : \delta \boldsymbol{E} dV \Delta \boldsymbol{u} = \\
&\quad \int_V \delta \boldsymbol{u}\rho_0 \boldsymbol{g} dV + \int_S \tilde{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS - \int_V \boldsymbol{S} : \delta \boldsymbol{E} dV
\end{aligned} \tag{19}$$

(2) 式を代入して成分表示すると、

$$\int_V \delta u_i \rho_0 \left.\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}\right|_{\boldsymbol{X}} dV \delta_{ij} + \delta u_i^a \frac{\partial Q_i^a}{\partial u_j^b} \Delta u_j = \int_V \delta u_i \rho_0 g_j dV \delta_{ij} + \int_S \tilde{t}_j \delta u_i dS \delta_{ij} - Q_i^a \delta u_i^a$$

$$\delta u_i^a \left(M \frac{\partial^2 u_{kj}^b}{\partial t^2} + K \Delta u_j \right) = \delta u_i^a \int_V N_i^a \rho_0 g_j dV \delta_{ij} + \delta u_i^a \int_S N_i^a \tilde{t}_j dS \delta_{ij} - Q_i^a \delta u_i^a \tag{20}$$

ただし、k は、Newton-Raphson 法の反復ステップ番号である。

$$M = \sum_e M_e \tag{21}$$

$$K = \sum_e K_e \tag{22}$$

$$M_{eij}^{pq} = \int_V N_i^p N_j^q dV \delta_{ij} \tag{23}$$

$$K_{eij}^{pq} = \frac{\partial Q_i^p}{\partial u_j^q} \tag{24}$$

$$\Delta u_j = u_{j,k} - u_{j,k-1} \tag{25}$$

接線剛性行列は、

$$\begin{aligned} K_{eij}^{pq} &= \frac{\partial Q_{ei}^p}{\partial u_j^q} && (26) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_j^q} \int_{V_e} S_{gh} B_{pigh} dV \\ &= \int_{V_e} \frac{\partial S_{gh}}{\partial u_j^q} B_{pigh} dV + \int_{V_e} S_{gh} \frac{\partial B_{pigh}}{\partial u_j^q} dV \\ &= K_{ij}^{Upq} + K_{ij}^{Spq} && (27) \\ K_{ij}^{Upq} &= \int_{V_e} \frac{\partial S_{gh}}{\partial u_j^q} B_{pigh} dV \quad \text{(初期変位項)} && (28) \\ K_{ij}^{Spq} &= \int_{V_e} S_{gh} \frac{\partial B_{pigh}}{\partial u_j^q} dV \quad \text{(初期応力項、幾何剛性行列)} && (29) \end{aligned}$$

初期応力項 K_{ij}^{Spq} を先に求める。

$$\begin{aligned} B_{piqh} &= \frac{\partial N^p}{\partial X_h} F_{ig} \\ &= \frac{\partial N^p}{\partial X_h} \left(\delta_{ig} + \frac{\partial N^r}{\partial X_g} u_i^r \right) && (30) \end{aligned}$$

を節点変位 u_j^q について微分すると、第一項は消えて、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B_{pigh}}{\partial u_j^q} &= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\frac{\partial N^r}{\partial X_g}\frac{\partial u_i^r}{\partial u_j^q} \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\frac{\partial N^r}{\partial X_g}\delta_{ij}\delta_{rq} \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\frac{\partial N^q}{\partial X_g}\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{31}
$$

よって、

$$
K_{ij}^{Spq} = \int_{V_e} S_{gh}\frac{\partial N^p}{\partial X_h}\frac{\partial N^q}{\partial X_g}\delta_{ij}dV \tag{32}
$$

次に初期変位項 K_{ij}^{Upq} を求める。
$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{E}$ の間に次の関係が成り立つものとする。

$$
d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} : d\boldsymbol{E} \tag{33}
$$

or

$$
dS_{gh} = C_{ghef}dE_{ef} \tag{34}
$$

ここに、$\boldsymbol{C}$ は構成則テンソルである。
このとき、

$$
\frac{\partial S_{gh}}{\partial u_j^q}du_j^q = C_{ghef}\frac{\partial E_{ef}}{\partial u_j^q}du_j^q \tag{35}
$$

これがあ任意の du_j^q について成り立つから、

$$
\frac{\partial S_{gh}}{\partial u_j^q} = C_{ghef}\frac{\partial E_{ef}}{\partial u_j^q} \tag{36}
$$

(17) 式を用いると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_{gh}}{\partial u_j^q} &= C_{ghef}\frac{1}{2}(B_{qjef} + B_{qjfe}) \\
&= \frac{1}{2}C_{ghef}B_{qjef} + \frac{1}{2}C_{ghfe}B_{qjef} \\
&= \frac{1}{2}\left(C_{ghef} + C_{ghfe}\right)B_{qjef} \\
&= \overline{C}_{ghef}B_{qjef}
\end{aligned} \tag{37}
$$

$$
\overline{C}_{ghef} = \frac{1}{2}(C_{ghef} + C_{ghfe}) \tag{38}
$$

よって、

$$
K_{ij}^{Upq} = \int_{V_e} \overline{C}_{ghef}B_{qjef}B_{pigh}dV \tag{39}
$$

なお、(36) 式、(37) 式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{gh}}{\partial u_j^q} &= C_{ghef} \frac{\partial E_{ef}}{\partial u_j^q} \\ &= \overline{C}_{ghef} \frac{\partial \overline{E}_{ef}}{\partial u_j^q} \end{aligned} \tag{40}$$

であることが分かる。

3　St Venant-Kirchhoff 超弾性体

3.1　構成式

St Venant-Kirchhoff 超弾性体の構成式は、

$$\boldsymbol{S} = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} \tag{41}$$

λ、μ は Lame の弾性定数である。
成分表示すると、

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \lambda E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \\ &= \lambda E_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij} + 2\mu E_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} \\ &= (\lambda\delta_{kl}\delta_{ij} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl})E_{kl} \end{aligned} \tag{42}$$

よって、

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} \tag{43}$$

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{kl}\delta_{ij} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{44}$$

これをテンソル表示すると、

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E} \tag{45}$$

$\boldsymbol{C}$ は、

$$\boldsymbol{C} = \lambda(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}) + 2\mu\boldsymbol{I}_4 \tag{46}$$

と書けるから、応力の微小な増分量についても次式が成り立つ。

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} : d\boldsymbol{E} \tag{47}$$

これは、(33) 式の仮定と一致する。

3.2 Total Lagrange 法の内力、接線剛性行列

内力は、

$$Q^p_{ei} = \int_{V_e} S_{gh} B_{pigh} dV \tag{48}$$
$$S_{gh} = \lambda E_{kk}\delta_{gh} + 2\mu E_{gh} \tag{49}$$
$$E_{gh} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_g}{\partial X_h} + \frac{\partial u_h}{\partial X_g} + \frac{\partial u_k}{\partial X_g}\frac{\partial u_k}{\partial X_h}\right) \tag{50}$$

接線剛性行列は、

$$K^{Spq}_{ij} = \int_{V_e} S_{gh}\frac{\partial N^p}{\partial X_h}\frac{\partial N^q}{\partial X_g}\delta_{ij} dV \tag{51}$$
$$K^{Upq}_{ij} = \int_{V_e} \overline{C}_{ghef} B_{qjef} B_{pigh} dV \tag{52}$$
$$B_{pigh} = \frac{\partial N^p}{\partial X_h} F_{ig} \tag{53}$$
$$\begin{aligned}\overline{C}_{ghef} &= \frac{1}{2}(C_{ghef} + C_{ghfe}) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda\delta_{ef}\delta_{gh} + 2\mu\delta_{ge}\delta_{hf} + \lambda\delta_{fe}\delta_{gh} + 2\mu\delta_{gf}\delta_{he}) \\ &= \lambda\delta_{ef}\delta_{gh} + \mu\delta_{ge}\delta_{hf} + \mu\delta_{gf}\delta_{he}\end{aligned} \tag{54}$$

(54) 式を (52) 式の被積分項に代入すると、

$$\begin{aligned}\overline{C}_{ghef} B_{qjef} B_{pigh} &= (\lambda\delta_{ef}\delta_{gh} + \mu\delta_{ge}\delta_{hf} + \mu\delta_{gf}\delta_{he}) B_{qjef} B_{pigh} \\ &= \lambda B_{qjgg} B_{pihh} + \mu(B_{qjgh} B_{pigh} + B_{qjhg} B_{pigh})\end{aligned} \tag{55}$$

したがって、

$$K^{Upq}_{ij} = \int_{V_e} \lambda B_{qjgg} B_{pihh} + \mu(B_{qjgh} B_{pigh} + B_{qjhg} B_{pigh}) dV \tag{56}$$

4 まとめ

St Venant-Kirchhoff 超弾性体に対して Total Lagrange 法を用いた FEM 定式化を行った。

5 参考文献

[1] 梅谷信行,"Total-Lagrange 法による幾何学的非線形弾性問題の有限要素法解析",2010

[2] 梅谷信行,"サンブナン体の有限要素法による解法",2010