Pressure Poisson Equation of Navier-Stokes Equations
- Standard Galerkin and SUPG Formulations -

ryujimiya

2020 年 02 月 12 日

1 はじめに

Navier-Stokes の方程式を変形して圧力ポアソン方程式 (Pressure Poisson Equation) とその弱形式を導出する。
Navier-Stokes 方程式の弱形式 ($\boldsymbol{v}$ に関する式) と、Pressure Poisson Equation の弱形式を連立して解くことにより、$\boldsymbol{v}$ と p を計算することができる。
弱形式の導出から静水圧 p は、p 自身と、その境界法線方向成分 $\dfrac{\partial p}{\partial n}$ の連続性が必要であることがわかり、「Bell Triangle」に記した三角形要素 Bell elements を導入して計算する。
連立方程式を解く方法としては、Newmark β 法で解く方法と、分離型の RK4(4 次 Runge-Kutta) で解く方法の 2 つを示す。
Newmark β 法で解く方法は、kinematic viscosity ν が小さい場合に対応するため SUPG(streamline upwind Petrov-Galerkin) 定式化もあわせて行う。

2 Dyadics

本書では、double dot product は次の定義を用いる。

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ij}$$

したがって、

$$\nabla \boldsymbol{v} : (\nabla \boldsymbol{v})^T = \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$$

3 Navier-Stokes 方程式

非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\rho \dot{\boldsymbol{v}} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \nabla p = \rho \boldsymbol{g} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{2}$$

(1) 式の発散をとる。

$$\nabla^2 p + \nabla \cdot \left\{ \rho \dot{\boldsymbol{v}} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} \right\} = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{g}$$

$$\nabla^2 p + \rho \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \rho \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v}) = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{g} \tag{3}$$

(2) 式を適用して、

$$\nabla^2 p + \rho \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v}) = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{g} \tag{4}$$

(4) 式の左辺第 2 項は、

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_l \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + v_l \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\
&= \nabla \boldsymbol{v} : (\nabla \boldsymbol{v})^T + \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \\
&= \nabla \boldsymbol{v} : (\nabla \boldsymbol{v})^T \qquad (5) \\
&\quad (\text{ただし、} \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \text{ を用いた})
\end{aligned}$$

(5) 式を (4) 式に代入して、

$$\nabla^2 p + \rho \nabla \boldsymbol{v} : (\nabla \boldsymbol{v})^T = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{g} \tag{6}$$

スタートの式としては、(4) 式か (6) 式がある。以下では両方について弱形式を求める。

4 (6) 式に基づく弱形式の定式化

まず、(6) 式に基づく定式化を行う。

(6) 式の両辺にスカラーテスト関数 δp を掛けて積分すると、

$$\int_V \nabla^2 p \delta p + \rho \nabla \boldsymbol{v} : (\nabla \boldsymbol{v})^T \delta p dV = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{g} \delta p dV \tag{7}$$

(7) 式の第 1 項

$$\begin{aligned}
\nabla^2 p \delta p &= \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} \delta p \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \delta p \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \delta p \right) - \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial \delta p}{\partial x_k} \\
&= \underline{\nabla \cdot (\nabla p \delta p)} - \nabla p \cdot \nabla \delta p
\end{aligned} \tag{8}$$

(8) 式の第 1 項は自然境界条件として積分値を 0 とおき、(8) 式を (7) 式に代入し両辺を -1 倍すると、

$$\int_V \nabla p \cdot \nabla \delta p - \rho \nabla \boldsymbol{v} : (\nabla \boldsymbol{v})^T \, \delta p dV = -\int_V \rho \nabla \cdot \boldsymbol{g} \delta p dV \tag{9}$$

自然境界条件の項、すなわち (8) 式の第 1 項は面積分に変換され、

$$-\int_S \boldsymbol{n} \cdot \nabla p \delta p dS \tag{10}$$

したがって自然境界条件は

$$-\boldsymbol{n} \cdot \nabla p = 0 \tag{11}$$

or

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

となる。一見良さそうだが物理的な境界を表していない。

$\delta \boldsymbol{v}$、δp、$\boldsymbol{v}$、p を次のように補間する。

$$\begin{aligned} \delta v_i &= N^a \delta v_i^a \\ \delta p &= M^c \delta p^c \\ v_j &= N^b v_j^b \\ p &= M^d p^d \end{aligned} \tag{12}$$

(9) 式を成分表示すると、

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial x_k}\frac{\partial \delta p}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial v_l}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_l} \delta p dV = -\int_V \rho \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \delta p dV \tag{13}$$

内力ベクトルは、

$$\begin{aligned} \{Q^p\}^c &= \frac{\partial}{\partial \delta p^c} \\ &= \int_V \frac{\partial p}{\partial x_k}\frac{\partial M^c}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial v_l}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_l} M^c dV \end{aligned} \tag{14}$$

接線剛性行列は、

$$\begin{aligned} [K^{pv}]_j^{cb} &= \frac{\partial \{Q^p\}^c}{\partial v_j^b} \\ &= -\int_V \rho \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial v_j^b} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right) M^c dV \\ & \qquad \text{(Picard の反復法を適用した)} \\ &= -\int_V \rho \frac{\partial v_l}{\partial x_k}\frac{\partial N^b}{\partial x_l} \delta_{kj} M^c dV \\ &= -\int_V \rho \frac{\partial v_l}{\partial x_j}\frac{\partial N^b}{\partial x_l} M^c dV \end{aligned} \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
[K^{pp}]^{cd} &= \frac{\partial \{Q^p\}^c}{\partial p^d} \\
&= \int_V \frac{\partial M^d}{\partial x_k}\frac{\partial M^c}{\partial x_k} dV
\end{aligned} \tag{16}
$$

外力ベクトルは、

$$
\{F^p\}^c = -\int_V \rho \frac{\partial g_k}{\partial x_x} M^c dV \tag{17}
$$

5　(4) 式に基づく弱形式の定式化

以下では (4) 式を用いた定式化を行う。
(4) 式の両辺にスカラーテスト関数 δp を掛けて積分すると、

$$
\int_V \nabla^2 p\delta p + \rho\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v})\,\delta p dV = \int_V \rho\nabla\cdot\boldsymbol{g}\delta p dV \tag{18}
$$

(18) 式の第 1 項は、

$$
\nabla^2 p\delta p = \underline{\nabla\cdot(\nabla p\delta p)} - \nabla p\cdot\nabla\delta p \tag{19}
$$

(18) 式の第 2 項と右辺第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{a}\delta p &= \frac{\partial a_k}{\partial x_k}\delta p \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}(a_k\delta p) - a_k\frac{\partial \delta p}{\partial x_k} \\
&= \underline{\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\delta p)} - \boldsymbol{a}\cdot\nabla\delta p
\end{aligned} \tag{20}
$$

を用いると、

$$
\int_V -\nabla p\cdot\nabla\delta p - \rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta p dV = -\int_V \rho\boldsymbol{g}\cdot\nabla\delta p dV
$$

-1 倍して、

$$
\int_V \nabla p\cdot\nabla\delta p + \rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta p dV = \int_V \rho\boldsymbol{g}\cdot\nabla\delta p dV \tag{21}
$$

ただし、(19) 式、(20) 式の積分は自然境界条件として 0 とおいた。
(19) 式の div 項は面積分に変換される。

$$
-\int_S \boldsymbol{n}\cdot(\nabla p + \rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v} - \rho\boldsymbol{g})\,\delta p dS \tag{22}
$$

これは (1) 式を用いると、

$$
-\int_S \boldsymbol{n}\cdot\left(\mu\nabla^2\boldsymbol{v} - \rho\dot{\boldsymbol{v}}\right)\delta p dS \tag{23}
$$

自然境界条件は、

$$
\begin{gathered}
-\boldsymbol{n}\cdot\left(\nabla p+\rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{g}\right)=0\\
\text{or}\\
-\boldsymbol{n}\cdot\left(\mu\nabla^2\boldsymbol{v}-\rho\dot{\boldsymbol{v}}\right)=0
\end{gathered} \tag{24}
$$

明らかに物理的な境界を表していない。

(21) 式を成分表示すると、

$$
\int_V \frac{\partial p}{\partial x_k}\frac{\partial \delta p}{\partial x_k}+\rho v_k\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\frac{\partial \delta p}{\partial x_l}dV=\int_V \rho g_k\frac{\partial \delta p}{\partial x_k}dV \tag{25}
$$

内力ベクトルは、

$$
\begin{aligned}
\{Q^p\}^c&=\frac{\partial}{\partial\delta p^c}\\
&=\int_V \frac{\partial p}{\partial x_k}\frac{\partial M^c}{\partial x_k}+\rho v_k\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\frac{\partial M^c}{\partial x_l}dV
\end{aligned} \tag{26}
$$

接線剛性行列は、

$$
\begin{aligned}
[K^{pv}]^{cb}_j&=\frac{\partial\{Q^p\}^c}{\partial v^b_j}\\
&=\int_V \rho v_k\frac{\partial N^b}{\partial x_k}\delta_{lj}\frac{\partial M^c}{\partial x_l}dV\\
&\quad(\text{Picard の反復法を適用した})\\
&=\int_V \rho v_k\frac{\partial N^b}{\partial x_k}\frac{\partial M^c}{\partial x_j}dV
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
[K^{pp}]^{cd}&=\frac{\partial\{Q^p\}^c}{\partial p^d}\\
&=\int_V \frac{\partial M^d}{\partial x_k}\frac{\partial M^c}{\partial x_k}dV
\end{aligned} \tag{28}
$$

外力ベクトルは、

$$
\{F^p\}^c=\int_V \rho g_k\frac{\partial M^c}{\partial x_k}dV \tag{29}
$$

6 (4) 式に基づく Navier-Stokes 方程式と Pressure Poison 方程式

連立方程式は、

$$
\int_V \mu\nabla\delta\boldsymbol{v}:\left\{\nabla\boldsymbol{v}+(\nabla\boldsymbol{v})^T\right\}+\rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}-(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\,p+\rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}dV=\int_V \delta\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{g}dV \tag{30}
$$

$$
\int_V \nabla p\cdot\nabla\delta p+\rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta p dV+Q_s=\int_V \rho\boldsymbol{g}\cdot\nabla\delta p dV \tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_s &= -\int_S \boldsymbol{n}\cdot\left(\nabla p + \rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v} - \rho\boldsymbol{g}\right)\delta p dS \\
&= -\int_S \boldsymbol{n}\cdot\left(\mu\nabla^2\boldsymbol{v} - \rho\dot{\boldsymbol{v}}\right)\delta p dS \\
&= \int_S \mu\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta p\times\boldsymbol{n} + \rho\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\delta p dS
\end{aligned}
\tag{32}
$$

マトリクス表示すると、

$$
[K^{vv}]\{v\} + [K^{vp}]\{p\} + [M^{vv}]\{\dot{v}\} = \{f^v\} \tag{33}
$$

$$
[K^{pv}]\{v\} + [K^{pp}]\{p\} + [K_s^{pv}]\{v\} + [K_s^{pp}]\{p\} = \{f^p\} \tag{34}
$$

or

$$
\begin{bmatrix} [K^{vv}] & [K^{vp}] \\ [K^{pv}] + [K_s^{pv}] & [K^{pp}] + [K_s^{pp}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v\} \\ \{p\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [M^{vv}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{v}\} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f^v\} \\ \{f^p\} \end{bmatrix} \tag{35}
$$

となる。

Newmark β 法を用いるので、$\{\dot{v}\}$ は、$\{v\}$ と、ひとつ前の時刻の値、時間についての 1 階微分、2 解微分 v^{t-1}、$\dot{v}^{t-1}$、$\ddot{v}^{t-1}$(既知) で表される。

$$
v = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(v - v^{t-1}\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{v}^{t-1} + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\ddot{v}^{t-1}\right) \tag{36}
$$

7　境界積分項を評価する

(4) 式を用いた定式化では、弱形式 (23) 式と面積分項 (22) または (23) 式が得られた。

面積分項を 0 とおく自然境界条件は物理的な境界を表していないことが分かった。

自然境界条件はあきらめ、面積分項を評価する必要がある。

面積分項 (23) 式は、

$$
-\int_S \boldsymbol{n}\cdot\left(\mu\nabla^2\boldsymbol{v} - \rho\dot{\boldsymbol{v}}\right)\delta p dS
$$

(23) 式

であった。

(23) 式の第 1 項は、

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\boldsymbol{v} &= \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) - \nabla\boldsymbol{v} \\
&= -\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v} \\
&\quad (\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \text{ を用いた})
\end{aligned}
$$

を用いると、

$$
\begin{aligned}
-\int_S \boldsymbol{n}\cdot\mu\nabla^2\boldsymbol{v}\delta p dS &= \int_S \mu\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v})\,\delta p dS \\
&= \int_V \mu\nabla\cdot\{(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v})\,\delta p\} \\
&= \int_V \{\delta p\nabla\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}) + \nabla\delta p\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v})\}\, dV \\
&\quad (\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{a}) = \phi\nabla\cdot\boldsymbol{a} + (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{a}\ \ \text{を用いた}) \\
&= \int_V \mu\nabla\delta p\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v})\, dV \\
&\quad (\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{a} = 0\ \text{を用いた}) \\
&= \int_V \mu\{\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\nabla\delta p - \nabla\cdot(\nabla\delta p\times\nabla\times\boldsymbol{v})\}\, dV \\
&\quad (\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\nabla\times\boldsymbol{b}) = \nabla\times\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{b})\ \ \text{を用いた}) \\
&= \int_V -\mu\nabla\cdot(\nabla\delta p\times\nabla\times\boldsymbol{v})\, dV \\
&\quad (\nabla\times\nabla\phi = 0\ \text{を用いた}) \\
&= -\int_S \mu\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\delta p\times\nabla\times\boldsymbol{v})\, dS \\
&= -\int_S \mu(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{n}\times\nabla\delta p)\, dS \\
&= \int_S \mu(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot(\nabla\delta p\times\boldsymbol{n})\, dS
\end{aligned}
\tag{37}
$$

(37) 式を (23) 式に代入すると、境界面積分 (23) 式は、

$$
\int_S \mu\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta p\times\boldsymbol{n} + \rho\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\delta p dS \tag{38}
$$

第 1 項を成分表示すると、

$$
\int_S \mu\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta p\times\boldsymbol{n} dS = \int_S \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial\delta p}{\partial x_1}n_2 - \frac{\partial\delta p}{\partial x_2}n_1\right) dS \tag{39}
$$

第 1 項の内力ベクトルは、

$$
\begin{aligned}
\{Q^p\}^c &= \frac{\partial}{\partial\delta p^c} \\
&= \int_S \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial M^c}{\partial x_1}n_2 - \frac{\partial M^c}{\partial x_2}n_1\right) dS
\end{aligned}
\tag{40}
$$

第 1 項の接線剛性行列は、

$$
\begin{aligned}
[K^{pv}]_j^{cb} &= \frac{\partial}{\partial v_j^b} \\
&= \int_S \mu\left(\frac{\partial N^b}{\partial x_1}\delta_{j2} - \frac{\partial N^b}{\partial x_2}\delta_{j1}\right)\left(\frac{\partial M^c}{\partial x_1}n_2 - \frac{\partial M^c}{\partial x_2}n_1\right) dS
\end{aligned}
\tag{41}
$$

第 2 項を成分表示すると、

$$\begin{aligned}\int_S \rho \boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{v}}\delta p dS &= \int_S \rho n_l \dot{v}_l \delta p dS \\ &= \int_S \rho n_l \left\{ \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\left(v_l - v_l^{t-1}\right) + \left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{v}_l^{t-1} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{v}_l^{t-1}\right\}\delta p \end{aligned} \tag{42}$$

ここに、β、γ は Newmark-β 法のパラメータであり、Δt は刻み時間幅、$t-1$ は 1 つ前の解である。
第 2 項の内力ベクトルは、

$$\{Q^p\}^c = \int_S \rho n_l \left\{ \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\left(v_l - v_l^{t-1}\right) + \left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{v}_l^{t-1} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{v}_l^{t-1}\right\} M^c dS \tag{43}$$

第 2 項の接線剛性行列は、

$$[K^{pv}]^{cb}_j = \int_S \rho n_j \frac{\gamma}{\beta \Delta t} N^b M^c dS \tag{44}$$

lid driven cavity 問題を解いたところ、(38) 式の境界条件を Wall に課す (Wall の境界条件は $\boldsymbol{v}=0$) ことで解けた。

8 Back-step: Inflow/Outflow 境界条件

Back-step 問題の場合、入力端と出力端が存在する。Inflow、Outflow の境界条件を求める。
なお、ここで記す方法は実験的である。

Outflow の境界条件は、$\boldsymbol{g}=0$ ならば、

$$\cdot \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \tag{45}$$

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \mu\left\{\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T\right\} \tag{46}$$

を満足するから、

$$-p\boldsymbol{n} + \mu\boldsymbol{n}\cdot\left\{\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T\right\} = 0 \tag{47}$$

$$p\boldsymbol{n} = \mu\boldsymbol{n}\cdot\left\{\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T\right\} \tag{48}$$

面積分項 (22) 式は、

$$-\int_S \boldsymbol{n}\cdot\left(\nabla p + \rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v} - \rho\boldsymbol{g}\right)\delta p dS$$

であった。
第 1 項は、まず (48) 式の両辺の div をとると、
左辺：

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (p\boldsymbol{n}) &= \frac{\partial\,(pn_k)}{\partial x_k} \\
&= n_k \frac{\partial p}{\partial x_k} \\
&= \boldsymbol{n} \cdot \nabla p
\end{aligned} \tag{49}
$$

右辺:

$$
\begin{aligned}
\mu \nabla \cdot \left[\boldsymbol{n}\left\{\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right\}\right] &= \mu \frac{\partial}{\partial x_l}\left(n_k \frac{\partial v_l}{\partial x_k} + n_k \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right) \\
&= \mu \left\{ n_k \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right) + n_k \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\right\} \\
&= \mu \left\{ n_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + n_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_l^2}\right\} \\
&= \mu \left\{\boldsymbol{n} \cdot \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}\right) + \boldsymbol{n} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v}\right\} \\
&= \mu \boldsymbol{n} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v} \\
&\quad (\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \text{ を用いた})
\end{aligned} \tag{50}
$$

すなわち、

$$
\boldsymbol{n} \cdot \nabla p = \mu \boldsymbol{n} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{51}
$$

が成り立つ。または、

$$
\boldsymbol{n} \cdot \nabla p = -\mu \boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v} \tag{52}
$$

したがって面積分 (22) 式の第 1 項は、

$$
-\int_S \boldsymbol{n} \cdot \nabla p \delta p dS = -\int_S \boldsymbol{n} \nabla^2 \boldsymbol{v} \delta p dS \tag{53}
$$

$$
= \int_S \mu \boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v} \delta p dS \tag{54}
$$

(54) 式を面積分 (22) 式に代入すると、

$$
\int_S \mu \boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v} \delta p - \rho \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} \delta p + \rho \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{g} \delta p dS \tag{55}
$$

(55) 式の第 1 項を成分表示すると、

$$
\int_S \mu \boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v} dS = \int_S \mu \left\{ n_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) - n_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\right\} \delta p dS \tag{56}
$$

ただし、

$$
\nabla \times \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_2
$$

を用いた。
第 1 項の内力ベクトルは、

$$\begin{aligned}\{Q^p\}^c &= \frac{\partial}{\partial \delta p^c} \\ &= \int_S \mu \left\{ n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \right\} M^c dS \qquad (57)\end{aligned}$$

第 1 項の接線剛性行列は、

$$\begin{aligned}[K^{pv}]_j^{cb} &= \frac{\partial \{Q^p\}^c}{\partial v_j^b} \\ &= \int_S \mu \left\{ n_1 \frac{\partial^2 N^b}{\partial x_2 \partial x_1} \delta_{j2} - n_1 \frac{\partial^2 N^b}{\partial x_2^2} \delta_{j1} - n_2 \frac{\partial^2 N^b}{\partial x_1^2} \delta_{j2} + n_2 \frac{\partial^2 N^b}{\partial x_1 \partial x_2} \delta_{j1} \right\} M^c dS \qquad (58)\end{aligned}$$

第 2 項を成分表示すると、

$$-\int_S \rho \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} \delta p dS = -\int_S \rho n_l v_k \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \delta p dS \qquad (59)$$

第 2 項の内力ベクトルは、

$$\{Q^p\}^c = -\int_S \rho n_l v_k \frac{\partial v_l}{\partial x_k} M^c dS \qquad (60)$$

第 2 項の接線剛性行列は、

$$\begin{aligned}[K^{pv}]_j^{cb} &= -\int_S \rho n_l v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \delta_{lj} M^c dS \\ &\quad (Picard \text{ の反復法を適用した}) \\ &= -\int_S \rho n_j v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k} M^c dS \qquad (61)\end{aligned}$$

第 3 項を成分表示すると、

$$\int_S \rho \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{g} \delta p dS = \int_S \rho n_l g_l \delta p dS \qquad (62)$$

第 3 項は外力ベクトルである。

$$\{F^p\}^c = \int_S \rho n_l g_l M^c dS \qquad (63)$$

Inflow(normal flow) の境界条件を、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \overline{\boldsymbol{v}} \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \qquad (64)\end{aligned}$$

としてみる。そうすると、面積分 (22) 式は、

$$-\int_S \boldsymbol{n}\cdot(\nabla p+\rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{g})\,\delta p dS = -\int_S \left(\underline{\frac{\partial p}{\partial n}}+\rho\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{g}\right)\delta p dS$$

$$= -\int_S (\rho\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{g})\,\delta p dS \tag{65}$$

$$(\frac{\partial p}{\partial n}=0\text{ を用いた})$$

第 1 項の成分表示、内力ベクトル、接線剛性行列は、すでに求めた (59) 式、(60) 式、(61) 式を参照。
第 2 項の成分表示、外力ベクトルは、すでに求めた (62) 式、(63) 式を参照。

9　三角形要素について

(38) 式の面積分項

$$-\int_S \mu\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta p\times\boldsymbol{n}+\rho\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\delta p dS$$

を見ると、$\boldsymbol{v}$ は値の連続性が保証されていればよく N_j^b は Lagrange 要素を用いればよい。
p は、δp と $\nabla\delta p$ の連続性が必要 (かもしれない) なので、M^c については Bell 要素を用いて定式化した。

10　RK4 を用いた分離型解法

RK4(4 次 Runge‐ Kutta) を用いた分離型解法を示す。
連立方程式 (30) 式、(31) 式、(32) 式は、

$$\int_V \mu\nabla\delta\boldsymbol{v}:\left\{\nabla\boldsymbol{v}+(\nabla\boldsymbol{v})^T\right\}+\rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}-(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\,p+\rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}dV=\int_V \delta\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{g}dV \tag{30}$$

$$\int_V \nabla p\cdot\nabla\delta p+\rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta p dV+Q_s=\int_V \rho\boldsymbol{g}\cdot\nabla\delta p dV \tag{31}$$

$$Q_s=-\int_S \boldsymbol{n}\cdot(\nabla p+\rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{g})\,\delta p dS$$

$$=-\int_S \boldsymbol{n}\cdot\left(\mu\nabla^2\boldsymbol{v}-\rho\dot{\boldsymbol{v}}\right)\delta p dS$$

$$=\int_S \mu\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\nabla\delta p\times\boldsymbol{n}+\rho\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\delta p dS \tag{32}$$

マトリクス表示 (33）式、(34) 式は、

$$[K^{vv}]\{v\}+[K^{vp}]\{p\}+[M^{vv}]\{\dot{v}\}=\{f^v\} \tag{33}$$

$$[K^{pv}]\{v\}+[K^{pp}]\{p\}+[K_s^{pv}]\{v\}+[K_s^{pp}]\{p\}=\{f^p\} \tag{34}$$

であった。この 2 式を連立するのではなく分離して解くことを考える。
(33) 式を RK4 で解く。

$$[M^{vv}]\{k+v^n\}=[M^{vv}]\{v^n\}+\Delta t\left(-[K^{vv}]\{\overline{v}\}-[K^{vp}]\{p\}+\{f^v\}\right) \tag{66}$$

$$
\begin{aligned}
&k : k_1 \text{のとき} \quad \overline{v} = v^n \\
&k : k_2 \text{のとき} \quad \overline{v} = v^n + \frac{k_1}{2} \\
&k : k_3 \text{のとき} \quad \overline{v} = v^n + \frac{k_2}{2} \\
&k : k_4 \text{のとき} \quad \overline{v} = v^n + k_3
\end{aligned} \tag{67}
$$

$$
\{v^{n+1}\} = \{v^n\} + \frac{1}{6}(\{k_1\} + 2\{k_2\} + 2\{k_3\} + \{k_4\}) \tag{68}
$$

(68) 式より $\{v^n\}$ が求まると、(34) 式を用いて p^n も求まる。
これを反復することにより解を求める。
なお、(34) 式に含まれる時間微分 $\dot{v}$、つまり (32) 式の第 2 項に相当する部分は、

$$
\int_S \rho \boldsymbol{n} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \delta p dS = \int_S \rho n_l \dot{v}_l \delta p dS \tag{69}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{v}_l &= \frac{v_l - v_l^{t-1}}{\Delta t} \\
&\text{or} \\
\dot{v}_l &= \frac{3v_l - 4v_l^{t-1} + v_l^{t-2}}{2\Delta t} \\
&\text{(2 次後退差分)}
\end{aligned} \tag{70}
$$

$$
\begin{aligned}
\{Q^p\}^c &= \int_S \rho n_l \dot{v}_l M^c dS \\
&= [K^{pv}]_j^{cb} \begin{bmatrix} \dot{v}_1^b \\ \dot{v}_2^b \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{71}
$$

$$
\begin{aligned}
[K^{pv}]_j^{cb} &= \int_S \rho n_l N^b \delta_{lj} M^c dS \\
&= \int_S \rho n_j N^b M^c dS
\end{aligned} \tag{72}
$$

11 SUPG(streamline upwind Petrov-Galerkin) -Pressure Poisson Equation の場合-

Pressure Poisson 方程式を Newmark β 法で解く方法に対する SUPG の定式化を行う。
Navier-Stokes + div$\boldsymbol{v}$ の SUPG の弱形式は、すでに「Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) Formulations for Navier-Stokes Equations」に記した。

$$
\begin{aligned}
&\int_V \mu \nabla \delta \boldsymbol{v} : \left\{ \nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T \right\} + \rho \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} - (\nabla \cdot \delta \boldsymbol{v})\, p + \rho \delta \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} dV \\
&\qquad + \underline{\int_V \frac{1}{\rho} (\tau_M \rho \boldsymbol{v} \nabla \delta \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{r}_M dV} + \underline{\int_V (\tau_C \rho \nabla \cdot \delta \boldsymbol{v})\, r_C dV} = \int_V \delta \boldsymbol{v} \cdot \rho \boldsymbol{g} dV
\end{aligned} \tag{73}
$$

$$
\int_V \delta p \nabla \cdot \boldsymbol{v} dV + \underline{\int_V (\tau_M \nabla \delta p) \cdot \boldsymbol{r}_M dV} = 0 \tag{74}
$$

$$
\boldsymbol{r}_M(\boldsymbol{v}, p) = \rho \dot{\boldsymbol{v}} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} + \nabla p - \rho \boldsymbol{g} \tag{75}
$$

$$
r_C = \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{76}
$$

(73) 式の第 4 項は SUPG 項、第 5 項は PSPG(Pressure stabilizing Petrov-Galerkin) 項、(74) 式の第 2 項は LSIC(Least square on incompresibility constraint) 項である。
div$\boldsymbol{v} = 0$ の代わりに Pressure LSIC を加えた Poisson 方程式の弱形式を用いることにする。
Pressure Poisson ＋ LSIC の弱形式は、

$$\int_V \nabla p \cdot \nabla \delta p + \rho \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} \cdot \nabla \delta p dV + Qs + \underline{\int_V \frac{1}{\rho}(\tau_M \nabla \delta p) \cdot \boldsymbol{r}_M dV} = \int_V \rho \boldsymbol{g} \cdot \nabla \delta p dV \tag{77}$$

(77) 式の第 3 項が LSIC 項である。
(73) 式と (77) 式を連立し、Newmark β 法て解いてみる。要素は p に Bell Triangle 要素、$\boldsymbol{v}$ に Langrange 要素を適用する。
SUPG、PSPG、LSIC の内力ベクトル、接線剛性行列は、「Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) Formulations for Navier-Stokes Equations」に記しているので参照されたい。
(77) 式の LSIC 項を加えず計算すると $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$: kinematic viscosity が小さくなると収束しなかった。
(77) 式の LSIC 項を加えた場合は、ν が小さくても収束することが分かった。ただ、収束判定条件は $\dfrac{\text{残差}}{\text{初期残差}} = 10^{-4}$ あたりに緩和する必要があり、課題として残った。(10^{-6} あたりまで収束させたい。)

12 まとめ

Navier-Stokes 方程式と Pressure Poisson 方程式の弱形式を定式化した。
この方法では、圧力 (静水圧)p が値とその法線方向微分の連続性を要請するため圧力には Bell Triangle を用いた。
速度 $\boldsymbol{v}$ は標準の Lagrange 要素を用いた。
連立方程式を解く方法としては、Newmark β 法で解く方法と、RK4(4 次 Runge-Kutta) で解く方法の 2 つを試した。
Newmark β 法で解く方法は、kinematic viscosity ν が小さい場合に対応するため SUPG(streamline upwind Petrov-Galerkin) 定式化も行った。

13 参考文献

[1] John Cornthwaite, "Pressure Poisson Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations Using Galerkin Finite Elements", Georgia Southern University, Digital Commons@Georgia Southern, Electronic Theses and Dissertations Graduate Studies, Jack N. Averitt College of, Summer 2013

[2] Yunhua Xue, Cheng Wang, Jian-Guo Liu, "Simple Finite Element Numerical Simulation of Incompressible Flow Over Non-rectangular Domains and the Super-Convergence Analysis", Springer Science+BusinessMedia New York 2015, J Sci Comput (2015) 65:pp.1189 -　1216, ,March 2015