Perfectly Matched Layers (PML) for Time Domain FEM

ryujimiya

2019 年 10 月 28 日

1　はじめに

時間領域有限要素法 (TDFEM) の完全整合層 (Perfectly Matched Layers, PML) としては、Jiao-Jin-Michielssen-Riley が導出したものがある。彼らは 3 次元問題として定式化しているが、1 方向 PML についても結果が記されている。
本文では Jiao-Jin-Michielssen-Riley の定式化と等価な 2 次元の PML の導出を行う。定式化は x 方向 PML、y 方向 PML、x,y 両方向 PML の 3 つから成る。
まず周波数領域 FEM の弱形式を求め、それを時間領域に変換する方法をとる。

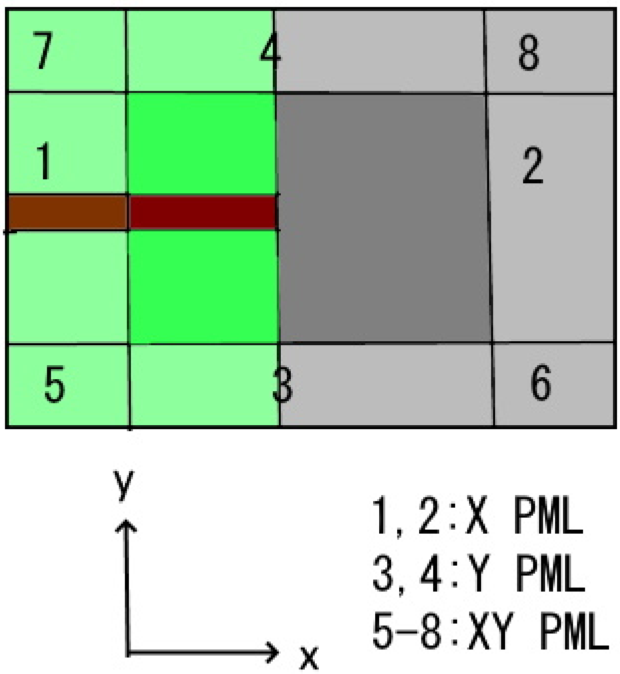

図 1　PML

2　周波数領域 FEM の PML

要素内の支配方程式は

$$p\frac{s_y}{s_x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x}+p\frac{s_x}{s_y}\frac{\partial^2\phi}{\partial y}+\omega^2\epsilon_0\mu_0 q s_x s_y \phi=0 \tag{1}$$

(1) 式に対応する弱形式は

$$\iint_\Omega p\frac{s_y}{s_x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{s_x}{s_y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-\omega^2\epsilon_0\mu_0 q s_x s_y N_i u d\Omega=0 \tag{2}$$

ここで

$$s_\xi=1+\frac{\sigma_\xi}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \qquad\qquad (\xi=x,\ y) \tag{3}$$

σ_x について記すと、

$$\sigma_x=\sigma_{xmax}\left(\frac{|x-x_0|}{l_{\mathrm{PML}}}\right)^2 \tag{4}$$

$$\sigma_{xmax}=\frac{3}{2l_{\mathrm{PML}}}\sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}ln\left(\frac{1}{R_0}\right) \tag{5}$$

x_0: PML の始点 (内部領域との境界) の X 座標

l_{PML} : PML の厚さ

R_0: PML の外へと垂直入射したときの反射係数を意味する小さい数 (あらかじめ指定する値)

3　マトリクス

弱形式で使用するマトリクスを定義しておく。

$$[M]_{ij}=\epsilon_0\mu_0\iint_\Omega qN_iN_j d\Omega \tag{6}$$

$$[K_x]_{ij}=\iint_\Omega p\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}d\Omega \tag{7}$$

$$[K_y]_{ij}=\iint_\Omega p\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}d\Omega \tag{8}$$

$$[Qb]_{ij}=\int_B pN_iN_j dB \tag{9}$$

$$[Rb]_{ij}=\int_B p\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}dB \tag{10}$$

$$[Tb]_{ij}=\int_B qN_iN_j dB \tag{11}$$

4　時間領域 FEM の PML(1) X 方向 PML

X 方向 PML のときの周波数領域の弱形式は、

$$\iint_\Omega p\frac{1}{s_x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+ps_x\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-\omega^2\epsilon_0\mu_0 q s_x N_i u d\Omega=0 \tag{12}$$

$$s_x = 1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \tag{13}$$

● $\frac{1}{s_x}u$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_x}u &= \frac{1}{1+\dfrac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}}u \\ &= \left(1 - \frac{1}{1+j\omega\dfrac{\epsilon_0\epsilon_r}{\sigma_x}}\right)u \end{aligned} \tag{14}$$

変換公式

$$\frac{1}{1+j\omega X} \leftrightarrow \frac{1}{X}e^{-\frac{t}{X}}\overline{u}(t) \tag{15}$$

$$1 \leftrightarrow \delta(t) \tag{16}$$

を使用すると

$$\frac{1}{s_x}u \Rightarrow \left(\delta(t) - \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t)\right) \bigstar u(t) \tag{17}$$

ここで、$\overline{u}(t)$: uint step function、$\bigstar$: temporal convolution である。
または、

$$\frac{1}{s_x}u \Rightarrow u - \psi_x \tag{18}$$

$$\psi_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t) \bigstar u(t) \tag{19}$$

● $s_x u$

$$s_x u = \left(1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\right)u \tag{20}$$

$$\Rightarrow u + \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}\int u dt \tag{21}$$

または、

$$s_x u \Rightarrow u + v_x \tag{22}$$

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}\int u dt$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}u \tag{23}$$

● $-\omega^2 s_x u$

$$\begin{aligned} -\omega^2 s_x u &= -\omega^2\left(1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\right)u \\ &= -\omega^2 u + j\omega\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}u \end{aligned} \tag{24}$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}\dot{u} \tag{25}$$

以上から (12) 式に対応する時間領域の弱形式は、

$$\iint_\Omega p\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right)+p\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+\epsilon_0\mu_0 qN_i\left(\ddot{u}+\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}\dot{u}\right)d\Omega=0 \tag{26}$$

または、

$$[K_x]u-[K_x]\psi_x+[K_y]u+[K_y]v_x+[M]\ddot{u}+\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}[M]\dot{u}=0 \tag{27}$$

5 時間領域 FEM の PML(2) Y 方向 PML

Y 方向 PML のときの周波数領域の弱形式は、

$$\iint_\Omega ps_y\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{1}{s_y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-\omega^2\epsilon_0\mu_0 qs_yN_iud\Omega=0 \tag{28}$$

$$s_y=1+\frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \tag{29}$$

● s_yu

$$s_yu = \left(1+\frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\right)u \tag{30}$$

$$\Rightarrow u+\frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}\int udt \tag{31}$$

または、

$$s_yu\Rightarrow u+v_y \tag{32}$$

$$v_y=\frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}\int udt$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}u \tag{33}$$

● $\dfrac{1}{s_y}u$

$$\frac{1}{s_y}u = \frac{1}{1+\dfrac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}}u$$

$$= \left(1-\frac{1}{1+j\omega\dfrac{\epsilon_0\epsilon_r}{\sigma_y}}\right)u \tag{34}$$

$$\Rightarrow \left(\delta(t)-\frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}e^{-\frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t)\right)\bigstar\, u(t) \tag{35}$$

または、

$$\frac{1}{s_y}u\Rightarrow u-\psi_y \tag{36}$$

$$\psi_y=\frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}e^{-\frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t)\bigstar\, u(t) \tag{37}$$

● $-\omega^2 s_y u$

$$-\omega^2 s_y u = -\omega^2 \left(1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\right) u$$

$$= -\omega^2 u + j\omega \frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r} u \tag{38}$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}\dot{u} \tag{39}$$

以上から (28) 式に対応する時間領域の弱形式は、

$$\iint_\Omega p\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + p\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) + \epsilon_0\mu_0 q N_i\left(\ddot{u} + \frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}\dot{u}\right) d\Omega = 0 \tag{40}$$

または、

$$[K_x]u + [K_x]v_y + [K_y]u - [K_y]\psi_y + [M]\ddot{u} + \frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}[M]\dot{u} = 0 \tag{41}$$

6 時間領域 FEM の PML(3) XY 両方向 PML

XY 両方向 PML のときの周波数領域の弱形式は、

$$\iint_\Omega p\frac{s_y}{s_x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{s_x}{s_y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \omega^2\epsilon_0\mu_0 q s_x s_y N_i u d\Omega = 0 \tag{42}$$

$$s_\xi = 1 + \frac{\sigma_\xi}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \qquad (\xi = x,\ y) \tag{43}$$

● $\dfrac{s_y}{s_x}u$

$$\frac{s_y}{s_x}u = \frac{1 + \dfrac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}}{1 + \dfrac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}} u$$

$$= \left(1 - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_x}\frac{1}{1 + j\omega\dfrac{\epsilon_0\epsilon_r}{\sigma_x}}\right) u \tag{44}$$

$$\Rightarrow \left(\delta(t) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_x} e^{-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t)\right) \bigstar\, u \tag{45}$$

または、

$$\frac{s_y}{s_x}u \Rightarrow u - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_x}\psi_x \tag{46}$$

● $\dfrac{s_x}{s_y}u$

$$\begin{aligned}\frac{s_x}{s_y}u &= \frac{1+\dfrac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}}{1+\dfrac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}}u \\ &= \left(1-\frac{\sigma_y-\sigma_x}{\sigma_y}\frac{1}{1+j\omega\dfrac{\epsilon_0\epsilon_r}{\sigma_y}}\right)u \qquad (47) \\ &\Rightarrow \left(\delta(t)-\frac{\sigma_y-\sigma_x}{\sigma_y}e^{-\frac{\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t)\right)\bigstar\ u \qquad (48)\end{aligned}$$

または、

$$\frac{s_x}{s_y}u \Rightarrow u-\frac{\sigma_y-\sigma_x}{\sigma_y}\psi_y \qquad (49)$$

● $-\omega^2 s_x s_y u$

$$\begin{aligned}-\omega^2 s_x s_y u &= -\omega^2\left(1+\frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\right)\left(1+\frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}\right)u \\ &= -\omega^2 u + j\omega\frac{\sigma_x+\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}u+\frac{\sigma_x\sigma_y}{\epsilon_0^2\epsilon_r^2}u \qquad (50) \\ &\Rightarrow \ddot{u}+\frac{\sigma_x+\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}\dot{u}+\frac{\sigma_x\sigma_y}{\epsilon_0^2\epsilon_r^2}u \qquad (51)\end{aligned}$$

以上から (42) 式に対応する時間領域の弱形式は、

$$\iint_\Omega p\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sigma_x}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right)+p\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\sigma_y-\sigma_x}{\sigma_y}\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)+\epsilon_0\mu_0 q N_i\left(\ddot{u}+\frac{\sigma_x+\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}\dot{u}+\frac{\sigma_x\sigma_y}{\epsilon_0^2\epsilon_r^2}u\right)d\Omega = 0 \qquad (52)$$

または、

$$[K_x]u-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sigma_x}[K_x]\psi_x+[K_y]u-\frac{\sigma_y-\sigma_x}{\sigma_y}[K_y]\psi_y+[M]\ddot{u}+\frac{\sigma_x+\sigma_y}{\epsilon_0\epsilon_r}[M]\dot{u}+\frac{\sigma_x\sigma_y}{\epsilon_0^2\epsilon_r^2}[M]u=0 \qquad (53)$$

7 ψ_ξ と v_ξ の計算方法

定式化には u 以外に ψ_ξ と v_ξ が現れるが、以下の関係式を使って逐次更新する。
Δt は時間刻み幅、$n+1$ はこれから解こうとしている時刻でその値は未知、n、$n-1$ はすでに計算した時刻でその値は既知である。
ψ_ξ と v_ξ のどちらも漸化式を使えば 2 つ前の値を使って 1 つ前の値を求めることができる。
ψ_ξ と v_ξ は隣接する要素間で不連続であるため、要素毎に要素内節点値を計算する必要がある。

● ψ_ξ

$$\psi_\xi = \frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t) \bigstar u(t) \tag{54}$$

次の関係式が導ける。(Appendix 参照)

$$\psi_\xi^n = e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r}\Delta t}\psi_\xi^{n-1} + \left(1 - e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r}\Delta t}\right) u^n \tag{55}$$

● v_ξ

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial t} = \frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r} u \tag{56}$$

次の関係式が導ける。

$$v_\xi^n = v_\xi^{n-1} + \frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r}\Delta t\ u^n \tag{57}$$

8　まとめ

Jiao-Jin-Michielssen-Riley の PML と等価な時間領域 FEM の PML を定式化した。定式化は、x 方向 PML、y 方向 PML、xy 両方向 PML の 3 つについて行った。

9　参考文献

[1] Dan Jiao, Jian-Ming Jin, Eric Michielssen, and Douglas J. Riley, "Time-domain finite-element simulation of three-dimensional scattering and radiation problems using perfectly matched layers." https://engineering.purdue.edu/~djiao/publications/DanJiao_pml3d.pdf, IEEE Transactions on Antennas and Propagation vol. 51, no. 2, February 2003

10　Appendix:　ψ_ξ の漸化式の導出

$$\psi_\xi(t) = \frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t) \bigstar u(t) \tag{58}$$

$$= \zeta(t) \bigstar u(t) \tag{59}$$

$$\zeta(t) = \frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0\epsilon_r}t}\overline{u}(t) \tag{60}$$

$$\psi_\xi(t) = \int_{\tau=0}^{t} \zeta(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{61}$$

$$= \int_{\tau=0}^{n\Delta t} \zeta(\tau)u(n\Delta t-\tau) \tag{62}$$

$\tau < 0$ のとき

$$\zeta(t) = 0 \tag{63}$$

$n\Delta t - \tau < 0 \to \tau > n\Delta t$ のとき

$$u(n\Delta t - \tau) = 0 \tag{64}$$

$$u(t) = \sum_{i=0}^{I} u(i\Delta t) p_i(t) \tag{65}$$

$$= \sum_{i=0}^{I} u^i p_i \tag{66}$$

$$p_i(t) = \begin{cases} 1 & (i\Delta t \leq t \leq (i+1)\Delta t) \\ 0 & (\text{otherwize}) \end{cases} \tag{67}$$

$$u(q\Delta t - \tau) = \sum_{i=0}^{n-1} u^{n-i} p_i(\tau) \tag{68}$$

$$\begin{aligned} \psi_\xi^n &= \int_{\tau=0}^{n\Delta t} \zeta(\tau) \sum_{i=0}^{n-1} u^{n-i} p_i(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} u^{n-i} \int_{\tau=0} n\Delta t \zeta(\tau) p_i(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} u^{n-i} \int_{\tau=i\Delta t} (i+1)\Delta t \zeta(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau=i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} \zeta(\tau) d\tau &= \frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_{\tau=i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0 \epsilon_r}\tau} d\tau \\ &= (1 - e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0 \epsilon_r}\Delta t}) e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0 \epsilon_r} i\Delta t} \qquad (70) \\ &= cb^i \qquad (71) \end{aligned}$$

$$c = 1 - e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0 \epsilon_r}\Delta t} \tag{72}$$

$$b^i = e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0 \epsilon_r} i\Delta t} \tag{73}$$

$$b = e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0 \epsilon_r}\Delta t} \tag{74}$$

$$\psi_\xi^n = \sum_{i=0} n - 1 u^{n-i} cb^i \tag{75}$$

$$= cu^n + \sum_{i=1}^{n-1} u^{n-i} cb^i \qquad (i = 0 \text{ の項を外出し}) \tag{76}$$

$$= cu^n + \sum_{i=0}^{n-2} u^{n-1-i} cb^{i+1} \tag{77}$$

$$= cu^n + b \sum_{i=0}^{(n-1)-1} u^{(n-1)-i} cb^i \qquad (b^{i+1} = bb^i) \tag{78}$$

$$= cu^n + b\psi^n - 1 \tag{79}$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0 \epsilon_r}\Delta t}\right) u^n + e^{-\frac{\sigma_\xi}{\epsilon_0 \epsilon_r}\Delta t} \psi^{n-1} \tag{80}$$