Weak Form of Navier-Stokes Equations

ryujimiya

2020 年 01 月 06 日

1　はじめに

Navier-Stokes の方程式の弱形式を導出する。
Laplacian 型の Navier-Stokes 方程式を出発点として導出するが、自然境界条件を検討した結果、補正項が必要となり結局 div 型 Navier-Stokes 方程式を出発点とした方がよいことが分かった。

2　Navier-Stokes 方程式

非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}} - \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \nabla p = \rho\boldsymbol{g} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{2}$$

3　Dyadics

ベクトル $\boldsymbol{v}$ の勾配 $\nabla\boldsymbol{v}$ は second-order tensor

$$(\nabla\boldsymbol{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

double-dot product

$$\nabla\boldsymbol{a} : \nabla\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

4　弱形式

(1) 式にテストベクトル $\delta\boldsymbol{v}$ を掛けて積分する

$$\int_V -\mu\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v} + \rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}dV = \int_V \delta\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{g}dV \tag{3}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla^2\boldsymbol{v} &= \delta v_i\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}\\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\delta v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\delta v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)-\nabla\delta\boldsymbol{v}:\nabla\boldsymbol{v} \qquad (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla p &= \delta v_k\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (5)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}(\delta v_k p)-\frac{\partial\delta v_k}{\partial x_k}p\\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}(\delta v_k p)-(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v})\,p \qquad (6)\end{aligned}$$

であるから、

$$\int_V \mu\nabla\delta\boldsymbol{v}:\nabla\boldsymbol{v}+\rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v}-(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v})\,p+\rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}dV=\int_V\delta\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{g}dV \qquad (7)$$

となる。ただし、(4) 式、(5) 式の右辺第一項は自然境界条件と処理するので消滅する。
(2) 式にテストスカラー δp を掛けて積分すると、

$$\int_V \delta p\nabla\cdot\boldsymbol{v}dV=0 \qquad (8)$$

(6)、(7) を成分表示すると

$$\int_V \mu\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\rho\delta v_i v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\delta v_i}{\partial x_i}p+\rho\delta v_i\dot{v}_i dV=\int_V\delta v_i\rho g_i dV \qquad (9)$$

$$\int_V \delta p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}dV=0 \qquad (10)$$

ここでテスト関数を次のように補間する。

$$\begin{aligned}\delta v_i &= N^a\delta v_i^a\\ \delta p &= M^c\delta p^c \qquad (11)\end{aligned}$$

a, c はそれぞれ $\boldsymbol{v}$、p の三角形要素の節点番号である。
(8) 式を δv_i^a で偏微分すると、
左辺

$$\{Q^v\}_i^a=\int_V \mu\frac{\partial N^a}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\rho N^a v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial N^a}{\partial x_i}p+\rho N^a\dot{v}_i dV \qquad (12)$$

右辺

$$\{F^v\}_i^a=\int_V N^a\rho g_i dV \qquad (13)$$

(9) 式を δp^c で偏微分すると

$$\{Q^p\}^c=\int_V M^c\frac{\partial v_j}{\partial x_j}dV \qquad (14)$$

これらを用いると

$$
\begin{aligned}
\{\delta v\}\{Q\} &= \{\delta v\}\{F\} \\
\rightarrow \{Q\} &= \{F\} \\
\{\delta v\} &= \begin{bmatrix} \delta v_i^a \\ \delta p^c \end{bmatrix} \\
\{Q\} &= \begin{bmatrix} \{Q^v\}_i^a \\ \{Q^p\}^c \end{bmatrix} \\
\{F\} &= \begin{bmatrix} \{F^U\}_i^a \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

(11) 式の第 2 項が非線形なので、Newton Raphson 法を用いて解く。

いま、$\boldsymbol{v}$、p がテスト関数と同じ補間関数で表されるものとする。

$$
\begin{aligned}
v_j &= N^b v_j^b \\
p &= M^d p^d
\end{aligned}
\tag{16}
$$

b、d はそれぞれ $\boldsymbol{v}$、p の三角形要素の節点番号である。

(11) 式の第 2 項を線形化する。

$$
\int_V \rho N^a v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \int_V \rho N^a \frac{\partial}{\partial v_j^b}\left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) dV \Delta v_j^b + \int_V \rho N^a v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV \tag{17}
$$

右辺第 2 項は内力ベクトルと呼ばれる。ここで、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v_j^b}\left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) &= \frac{\partial v_k}{\partial v_j^b}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial}{\partial v_j^b}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) \\
&= N^b \delta_{kj} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k}\delta_{ij} \\
&= N^b \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k}\delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

全成分を書き記すと

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v_1^b}\left(v_k \frac{\partial v_1}{\partial v_k}\right) &= N^b \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial N^b}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial N^b}{\partial x_2} \\
\frac{\partial}{\partial v_2^b}\left(v_k \frac{\partial v_1}{\partial x_k}\right) &= N^b \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\
\frac{\partial}{\partial v_1^b}\left(v_k \frac{\partial v_2}{\partial x_k}\right) &= N^b \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \\
\frac{\partial}{\partial v_2^b}\left(v_k \frac{\partial v_2}{\partial x_k}\right) &= N^b \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_1 \frac{\partial N^b}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial N^b}{\partial x_2}
\end{aligned}
$$

したがって (17) 式右辺第一項は、

$$
\int_V \rho N^a \frac{\partial}{\partial v_j^b}\left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) dV \Delta v_j^b = \int_V \rho N^a \left(N^b \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) dV \Delta v_j^b \tag{19}
$$

(15) 式を (14) 式 $\{Q\} = \{F|$ に代入し、(18) 式の線形化を用いると方程式は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} [M^{vv}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{v}_j^b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{vv1}]_{ij}^{ab} & [K^{vp}]_i^{ad} \\ [K^{pv}]_j^{cb} & [K^{pp}]^{cd} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_j^b \\ p^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{vv2}]_{ij}^{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta v_j^b \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\qquad = \begin{bmatrix} \{F^v\}_i^a - \{Q^{v\ nonlinear}\}_i^a \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$[M^{vv}]_{ij}^{ab} = \int_V \rho N^a N^b \delta_{ij} dV \tag{21}$$

$$\left[K^{vv1}\right]_{ij}^{ab} = \int_V \mu \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\frac{\partial N^b}{\partial x_k}\delta_{ij} dV \tag{22}$$

(あとで (49) 式に置き換える)

$$\left[K^{vv2}\right]_{ij}^{ab} = \int_V \rho N^a \left(N^b \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) dV \tag{23}$$

$$[K^{vp}]_i^{ad} = -\int_V \frac{\partial N^a}{\partial x_i} M^d dV \tag{24}$$

$$[K^{pv}]_j^{cb} = \int_V M^c \frac{\partial N^b}{\partial x_j} dV \tag{25}$$

$$[K^{pp}]^{cd} = 0 \tag{26}$$

$$\{F^v\}_i^a = \int_V N^a \rho g_i dV \tag{27}$$

内力ベクトル（非線形項）

$$\{Q^v\}_i^{a\ nonlinear} = \int_V \rho N^a v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV \tag{28}$$

5　自然境界条件

(4) 式、(5) 式の右辺第一項を自然境界条件と処理したが、これがどういう条件に対応するかを検討する。(4) 式の右辺第一項は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\delta v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\delta \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\delta \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_2}\right) \\ &= \nabla\cdot(\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v})\end{aligned} \tag{29}$$

体積積分すると、

$$\begin{aligned}\int_V \nabla\cdot(\delta\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v})\, dV &= \int_S \boldsymbol{n}\left(\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) dS \\ &= \int_S \delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\nabla\boldsymbol{v} dS \\ &= \int_S \delta\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{n}} dS\end{aligned} \tag{30}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{n}} &= \boldsymbol{n}\cdot\nabla\boldsymbol{v} \\ &= n_j\frac{\partial\boldsymbol{v}}{x_j} \\ &= \begin{bmatrix} n_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & n_2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ n_1\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & n_2\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(5) の右辺第一項は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}(\delta v_k p) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta v_1 p) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\delta v_2 p) \\ &= \nabla \cdot (\delta \boldsymbol{v} p)\end{aligned} \tag{31}$$

体積積分すると、

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot (\delta \boldsymbol{v} p)\, dV &= \int_S \boldsymbol{n} (\delta \boldsymbol{v} p)\, dS \\ &= \int_S \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} p dS\end{aligned} \tag{32}$$

したがって、(30) 式と (32) 式の面積分項の寄与は、

$$\int_S \delta \boldsymbol{v} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} + p\boldsymbol{n} \right) dS \tag{33}$$

となる。(33) 式を 0 とした式が (6) 式である。つまり、自然境界条件を

$$-\mu \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} + p\boldsymbol{n} = 0 \tag{34}$$

としたことになる。(34) 式を別の表現に書き換えると、

$$-p\boldsymbol{n} + \mu (\nabla \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{n} = 0 \tag{35}$$

一方、応力に関する境界条件は

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{36}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= -p\boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{D} \\ &= -p\boldsymbol{I} + \mu \left(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T \right)\end{aligned} \tag{37}$$

であるから、

$$-p\boldsymbol{I} + \mu \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} + \underline{\mu (\nabla \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{n}} = 0 \tag{38}$$

が物理的に正確な条件である。
つまり (34) 式の自然境界条件は物理的な境界条件を満たしていない。

6 定式化の修正

物理的な境界条件に合った自然境界条件になるように定式化を修正する。
自然境界条件が物理的な境界条件でないことがわかったので、自然境界条件として 0 と置いた部分を復活させる。
(6) の弱形式を面積分項を含めて書くと、

$$\int_V \mu \nabla \delta \boldsymbol{v} + \rho \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} - (\nabla \cdot \delta \boldsymbol{v})\, p + \rho \delta \boldsymbol{v} \dot{\boldsymbol{v}} dV + \int_S \delta \boldsymbol{v} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} + p\boldsymbol{n} \right) dS = \int_V \delta \boldsymbol{v} \cdot \rho \boldsymbol{g} dV \tag{39}$$

応力の境界条件 (38) 式を適用すると、

$$\int_V \mu \nabla \delta \boldsymbol{v} + \rho \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} - (\nabla \cdot \delta \boldsymbol{v})\, p + \rho \delta \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} dV + \int_S \delta \boldsymbol{v} \cdot \mu (\nabla \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{n} dS = \int_V \delta \boldsymbol{v} \cdot \rho \boldsymbol{g} dV \tag{40}$$

(40) 式で新たに追加された面積分項は Gauss の発散定理を適用して体積分に変換する。

$$\int_S \delta \boldsymbol{v} \cdot \mu (\nabla \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{n} dS = \int_V \nabla \cdot \{\mu \delta \boldsymbol{v} (\nabla \boldsymbol{v})\}\, dV \tag{41}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \left\{ \boldsymbol{v} \left(\nabla \boldsymbol{v} \right)^T \right. &= \nabla \cdot \left\{ \delta v_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \right\} \\
&= \nabla \cdot \left\{ \delta v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \left(\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i \right) \boldsymbol{e}_j \right\} \\
&= \nabla \cdot \left(\delta v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_j \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\delta v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \delta v_i \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial x_i} \\
&= \frac{\delta v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \delta v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\
&= \left(\delta \boldsymbol{v} \otimes \nabla \right) : \left(\nabla \otimes \boldsymbol{v} \right) + \delta \boldsymbol{v} \cdot \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{v} \right) \\
&= \nabla \delta \boldsymbol{v} : \left(\nabla \boldsymbol{v} \right)^T + \delta \boldsymbol{v} \cdot \nabla \left(\underline{\nabla \cdot \boldsymbol{v}} \right) \\
&= \nabla \delta \boldsymbol{v} : \left(\nabla \boldsymbol{v} \right)^T
\end{aligned}
\tag{42}
$$

(ただし、$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を用いた)

(42) 式を (41) 式に代入すると、

$$\int_S \delta \boldsymbol{v} \mu \left(\nabla \boldsymbol{v} \right)^T \boldsymbol{n} dS = \int_V \mu \nabla \delta \boldsymbol{v} : \left(\nabla \boldsymbol{v} \right)^T dV \tag{43}$$

となる。(40) 式に代入すると、弱形式は次のように修正される。

$$\int_V \mu \nabla \delta \boldsymbol{v} : \left\{ \nabla \boldsymbol{v} + \underline{\left(\nabla \boldsymbol{v} \right)^T} \right\} + \rho \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} - \left(\nabla \cdot \delta \boldsymbol{v} \right) p + \rho \delta \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} dV = \int_V \delta \boldsymbol{v} \cdot \rho \boldsymbol{g} dV \tag{44}$$

(44) 式の自然境界条件は (38) 式であり物理的な境界条件となっている。

また、(44) 式に対応する Navier-Stokes 方程式は、

$$\rho \dot{\boldsymbol{v}} - \mu \nabla \cdot \left\{ \nabla \boldsymbol{v} + \left(\nabla \boldsymbol{v} \right)^T \right\} + \rho \boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v} + \nabla p = \rho \boldsymbol{g} \tag{45}$$

であることが分かる。これは div 型 Navier-Stokes 方程式と一致する。

(44) 式の自然境界条件は、

$$-p \boldsymbol{n} + \mu \left\{ \nabla \boldsymbol{v} + \underline{\left(\nabla \boldsymbol{v} \right)^T} \right\} \boldsymbol{n} = 0 \tag{46}$$

最後に方程式の成分表示の修正箇所を示す。

(44) 式の成分表示 [(8) 式に対応する式] は、

$$\int_V \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\underline{\partial x_i}} \right) + \ldots \tag{47}$$

内力ベクトル [(11) 式に対応する式] は、

$$\left\{ Q^v \right\}_i^a = \int_V \mu \frac{\partial N^a}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\underline{\partial x_i}} \right) + \ldots \tag{48}$$

剛性行列 [(21) 式に対応する式] は、

$$
\begin{aligned}
\left[K^{vv1}\right]_{ij}^{ab} &= \int_V \mu \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\left(\frac{\partial N^b}{\partial x_k}\delta_{ij} + \underline{\frac{\partial N^b}{\partial x_i}\delta kj}\right) \\
&= \int_V \mu \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\frac{\partial N^b}{\partial x_k}\delta_{ij} + \underline{\mu \frac{\partial N^a}{\partial x_j}\frac{\partial N^b}{\partial x_i}dV}
\end{aligned} \tag{49}
$$

7　まとめ

Laplacian 型の Navier-Stokes の弱形式を導出すると、自然境界条件が物理的条件を満たさなかった。
そこで物理的条件が自然境界条件になるように弱形式を修正すると別の形の Navier-Stokes 方程式 (div 型 Navier-Stokes 方程式) に一致することが示せた。

8　参考文献

[1] Alejandro Limachea and Sergio Idelsohnb, ”Laplace form of navier-stokes equations: a safe path or a wrong way?”, Mecánica Computacional Vol XXV, pp. 151-168, Alberto Cardona, Norberto Nigro, Victorio Sonzogni, Mario Storti. (Eds.) Santa Fe, Argentina, Noviembre 2006