Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) Formulations for Navier-Stokes Equations

ryujimiya

2020 年 01 月 07 日

1　はじめに

Navier-Stokes 方程式を標準ガラーキン法で解くとき、kinematic viscocity ν が小さくなると解が収束しなくなる。この問題を解消する安定化有限要素法 (Stabilized Finite Element Formulations) として SUPG(Streamline Upwind Petrov-Galerkin) 法がある。
以下で SUPG の定式化を示す。SUPG では標準ガラーキン法に新たな安定項を追加する。以下では追加項の計算結果のみを示している。標準ガラーキン法の部分はすでにまとめた「Weak Form of Navier-Stokes Equations」に記しているのでそちらを参照されたい。
線形化には最初 Newton-Raphson 法を試したが、kinematic viscocity ν が小さくなると発散したので、Picard の反復法を使用した。以下では Newton-Raphson 法、Picard の反復法の両方について定式化している。

2　Navier-Stokes 方程式

非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} \rho\dot{\boldsymbol{v}} - \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \nabla p &= \rho\boldsymbol{g} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0 \end{aligned}$$

3　残差

$$\boldsymbol{r}_M(\boldsymbol{v}, p) = \rho\dot{\boldsymbol{v}} - \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v} - \nabla p - \rho\boldsymbol{g} \tag{1}$$

$$r_C(\boldsymbol{v}) = \nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{2}$$

4　弱形式

SUPG の項は次のように定義する。

$$\int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho \boldsymbol{v}\nabla\delta\boldsymbol{v} + \tau_M \nabla\delta p\right] \cdot \boldsymbol{r}_M dV \tag{3}$$

$$\int_V \left[\tau_C \rho \nabla\cdot\delta\boldsymbol{v}\right] r_C dV \tag{4}$$

(3) 式の第一項が SUPG(Streamline Upwind Petrov-Galerkin)、第二項が PSPG(Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin)、(4) 式が LSIC(Least Squares on Incompressibility Constraint) の項である。
(3) 式、(4) 式をガラーキン法の弱形式に加えると、

$$\begin{aligned}&\int_V \mu\nabla\delta\boldsymbol{v} : \left\{\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T\right\} + \rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{v} - (\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v})\,p + \rho\delta\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}dV \\ &+ \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho\boldsymbol{v}\nabla\delta\boldsymbol{v}\right]\cdot\boldsymbol{r}_M dV + \int_V \left[\tau_C\rho\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v}\right] r_C dV = \int_V \delta\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{g}dV\end{aligned} \tag{5}$$

$$\int_V \delta p\nabla\cdot\boldsymbol{v}dV + \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M\nabla\delta p\right]\cdot\boldsymbol{r}_M dV = 0 \tag{6}$$

(5) 式の第 4 項が SUPG、第 5 項が LSIC、(6) 式の第 2 項が PSPG の項である。

5　安定化パラメータ

安定化パラメータ τ_M、τ_C の決定方法はいくつかの方法がある。ここでは文献 [2] の方法を用いた。

$$\tau_M = \left\{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \boldsymbol{v}\boldsymbol{G}\boldsymbol{v} + C_I\nu^2\boldsymbol{G} : \boldsymbol{G}^T\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

$$(C_I = 30)$$

$$\tau_C = \frac{1}{\tau_M \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g}} \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{G})_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \tag{9}$$

$$(\boldsymbol{g})_i = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \tag{10}$$

$$d = 2 \text{ for 2 dimensions}$$

$$\xi_i = L_i \quad (i = 1, 2) \tag{11}$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x_1} = b_k \tag{12}$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x_2} = c_k$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \sum_k b_k b_k & \sum_k b_k c_k \\ \sum_k c_k b_k & \sum_k c_k c_k \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \sum_k b_k \\ \sum_k c_k \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{G} : \boldsymbol{G}^T = (\boldsymbol{G})_{ij} (\boldsymbol{G})_{ij} \tag{15}$$

6 Newton-Raphson 法：内力ベクトル

Newton-Raphson 法を適用したときの内力ベクトルを計算する。
(5) 式の SUPG 項に対して

$$\frac{1}{\rho} [\tau_M \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{r}_M = \frac{1}{\rho} \left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \right] r_{Mi} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \left\{ Q^{v1} \right\}_i^a &= \frac{\partial}{\partial \delta v_i^a} \\ &= \int_V \frac{1}{\rho} \left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k} \right] r_{Mi} dV \end{aligned} \tag{17}$$

(5) 式の LSIC 項に対して

$$[\tau_C \rho \nabla \cdot \delta \boldsymbol{v}] \, r_C = \left[\tau_C \rho \frac{\partial \delta v_k}{\partial x_k} \right] r_{Mi} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \left\{ Q^{v2} \right\}_i^a &= \frac{\partial}{\partial \delta v_i^a} \\ &= \int_V \left[\tau_C \rho \frac{\partial N^a}{\partial x_k} \delta_{ki} \right] r_C dV \\ &= \int_V \left[\tau_C \rho \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \right] r_C dV \end{aligned} \tag{19}$$

(6) 式の PSPG 項に対して

$$\frac{1}{\rho}[\tau_M \nabla \delta p] \cdot \boldsymbol{r}_M = \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \frac{\partial \delta p}{\partial x_i}\right] r_{Mi} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\{Q^p\}^c &= \frac{\partial}{\partial \delta p^c} \\
&= \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \frac{\partial M^c}{\partial x_i}\right] r_{Mi} dV \quad (i \text{ について sum}) \\
&= \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \frac{\partial M^c}{\partial x_k}\right] r_{Mk} dV
\end{aligned} \tag{21}$$

7 Newton-Raphson 法：接線剛性行列

Newton-Raphson 法を適用したときの接戦剛性行列を計算する。
SUPG 項 (17) 式に対して

$$\begin{aligned}
\left[K^{vv1}\right]_{ij}^{ab} &= \frac{\partial \left\{Q^{v1}\right\}_i^a}{\partial v_j^b} \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial v_j^b}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right] r_{Mi}\right\} dV \\
&= \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho N^b \delta_{kj} \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right] r_{Mi} + \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right] \frac{\partial r_{Mi}}{\partial v_j^b} dV \\
&= \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho N^b \frac{\partial N^a}{\partial x_j}\right] r_{Mi} + \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right] \frac{\partial r_{Mi}}{\partial v_j^b} dV
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
[K^{vp}]_i^{ad} &= \frac{\partial \left\{Q^{v1}\right\}_i^a}{\partial p^d} \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial p^d}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right] r_{Mi}\right\} dV \\
&= \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right] \frac{\partial r_{Mi}}{\partial p^d} dV
\end{aligned} \tag{23}$$

LSIC 項 (19) 式に対して

$$\begin{aligned}
\left[K^{vv2}\right]_{ij}^{ab} &= \frac{\left\{Q^{v2}\right\}_i^a}{\partial v_i^b} \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial v_j^b}\left\{\left[\tau_C \rho \frac{\partial N^a}{\partial x_i}\right] r_C\right\} dV \\
&= \int_V \left[\tau_C \rho \frac{\partial N^a}{\partial x_i}\right] \frac{\partial r_C}{\partial v_j^b} dV
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\left[K^{vp2}\right]_i^{ad} = \frac{\left\{Q^{v2}\right\}_i^a}{\partial p^d} = 0 \tag{25}$$

$$\left(r_C = r_C(\boldsymbol{v}) \ \rightarrow\ \frac{\partial r_C}{\partial p^d} = 0 \text{ を用いた}\right)$$

PSPG 項 (21) 式に対して

$$\begin{aligned}
\left[K^{pv}\right]_j^{cb} &= \frac{\partial \left\{Q^p\right\}^c}{\partial v_j^b} \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial v_j^b} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\tau_M \frac{\partial M^c}{\partial x_k} \right] r_{Mk} \right\} dV \\
&= \int_V \frac{1}{\rho} \left[\tau_M \frac{\partial M^c}{\partial x_k} \right] \frac{\partial r_{Mk}}{\partial v_j^b} dV \qquad (26) \\
\left[K^{pp}\right]^{cd} &= \frac{\partial \left\{Q^p\right\}^c}{\partial p^d} \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial p^d} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\tau_M \frac{\partial M^c}{\partial x_k} \right] r_{Mk} \right\} dV \\
&= \int_V \frac{1}{\rho} \left[\tau_M \frac{\partial M^c}{\partial x_k} \right] \frac{\partial r_{Mk}}{\partial p^d} dV \qquad (27)
\end{aligned}$$

8　Newton-Raphson 法：残差

接線剛性行列に現れる残差とその偏微分は次のように導ける。

(1) 式の残差について、

$$r_{Mi} = \rho \dot{v}_i - \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_{Mi}}{\partial v_j^b} &= \rho \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_j^b} - \mu \frac{\partial^2 N^b}{\partial x_k^2} \delta_{ij} + \rho \left[N^b \delta_{kj} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \\
&= \rho \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_j^b} - \mu \frac{\partial^2 N^b}{\partial x_k^2} \delta_{ij} + \rho \left[N^b \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \qquad (29)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_{Mi}}{\partial p^d} = \frac{\partial M^d}{\partial x_i} \tag{30}$$

(2) 式の残差について、

$$r_C = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_C}{\partial v_j^b} &= \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \delta_{kj} \\
&= \frac{\partial N^b}{\partial x_j} \qquad (32)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_C}{\partial p^d} = 0 \tag{33}$$

また、$\dot{v}_i$、$\dfrac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_j^b}$ は Newmark β 法を用いると、

$$\begin{aligned}
\dot{v}_i &= N^b \dot{v}_i^b \\
&= N^b \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \left(v_i - v_i^{t-1} \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{v}_i^{t-1} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{v}_i^{t-1} \right] \qquad (34) \\
\frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_j^b} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} N^b \delta_{ij} \qquad (35)
\end{aligned}$$

となる。ただし、Newmark β 法の関係式

$$\begin{aligned}
\dot{d} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \left(d - d^{t-1} \right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{d}^{t-1} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{d}^{t-1} \\
\frac{\partial \dot{d}}{\partial d} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t}
\end{aligned}$$

を用いた。

9 Picard の反復法

先に導出した Newton-Raphson 法を用いると、kinematic viscocity $\nu (= \mu / \rho)$ が小さくなると発散した。そこで Newton-Raphson 法はやめて、Picard の反復法を使用することにした。その結果、さらに小さな ν でも収束することが分かった。

Picard の反復法は、非線形項 $\boldsymbol{v} \nabla \boldsymbol{v}$ を $\overline{\boldsymbol{v}} \nabla \boldsymbol{v}$ ($\overline{\boldsymbol{v}}$ は定数扱い) に置き換えることで線形化する。

$$\begin{aligned}
&\int_V \mu \nabla \delta \boldsymbol{v} : \left\{ \nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T \right\} + \rho \delta \boldsymbol{v} \cdot \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \boldsymbol{v} - (\nabla \cdot \delta \boldsymbol{v}) \, p + \rho \delta \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} dV \\
&+ \int_V \frac{1}{\rho} [\tau_M \rho \overline{\boldsymbol{v}} \nabla \delta \boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{r}_M dV + \int_V [\tau_C \rho \nabla \cdot \delta \boldsymbol{v}] \, r_C dV = \int_V \delta \boldsymbol{v} \cdot \rho \boldsymbol{g} dV \qquad (36) \\
&\int_V \delta p \nabla \cdot \boldsymbol{v} dV + \int_V \frac{1}{\rho} [\tau_M \nabla \delta p] \cdot \boldsymbol{r}_M dV = 0 \qquad (37)
\end{aligned}$$

Picard 反復法を適用すると次の方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} [M^{vv}]_{ij}^{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_j^b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[K^{vv1} \right] + \left[K^{vv2} \right]_{ij}^{ab} & [K^{vp}]_i^{ad} \\ [K^{pv}]_j^{cb} & [K^{pp}]^{cd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j^b \\ p^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F^v\}_i^a - \{Q^v\}_i^a \\ -\{Q^p\}^c \end{bmatrix} \qquad (38)$$

Picard 反復法の場合、$[K^{vv2}]$ の SUPG を除いた部分は、

$$\left[K^{vv2} \right]_{ij}^{ab} = \int_V \rho N^a v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \delta_{ij} dV \qquad (39)$$

となることに注意。それ以外の SUPG を除いた行列、ベクトルは「Weak Form of Navier-Stokes Equations」に記したものになる。

SUPG 項等の部分の内力ベクトルは、Newmark β 法を用いると、

$$\left\{\tilde{Q}^v\right\}_i^a = \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right]\left\{-\frac{\gamma}{\beta\Delta t}v_i^{t-1} + \left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{v}_i^{t-1} + \Delta t\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\ddot{v}_i^{t-1} - \rho g_i\right)\right\}dV \tag{40}$$

$$\left\{\tilde{Q}^p\right\}^c = \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \frac{\partial M^c}{\partial x_k}\right]\left\{-\frac{\gamma}{\beta\Delta t}v_k^{t-1} + \left(1-\frac{\gamma}{\beta}\dot{v}_k^{t-1} + \Delta t\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{v}_k^{t-1} - \rho g_k\right)\right\} \tag{41}$$

SUPG 項等の部分の剛性行列は、

$$\left[\tilde{K}^{vv1}\right]_{ij}^{ab} = \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right]\frac{\partial r_{Mi}}{\partial v_j^b}dV \tag{42}$$

$$\left[K^{vp}\right]_i^{ad} = \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \rho v_k \frac{\partial N^a}{\partial x_k}\right]\frac{\partial r_{Mi}}{\partial p^d}dV \tag{43}$$

$$\left[K^{vv2}\right]_{ij}^{ab} = \int_V \left[\tau_C \rho \frac{\partial N^a}{\partial x_i}\right]\frac{\partial r_C}{\partial v_j^b}dV \tag{44}$$

$$\left[K^{pv}\right]_j^{cb} = \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \frac{\partial M^c}{\partial x_k}\right]\frac{\partial r_{Mk}}{\partial v_j^b}dV \tag{45}$$

$$\left[K^{pp}\right]^{cd} = \int_V \frac{1}{\rho}\left[\tau_M \frac{\partial M^c}{\partial x_k}\right]\frac{\partial r_{Mk}}{\partial p^d}dV \tag{46}$$

残差 r_{Mi} の v_j^b についての偏微分は Newton-Raphson 法と異なり次のようになる。

$$\frac{\partial r_{Mi}}{\partial v_j^b} = \rho\frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_j^b} - \mu\frac{\partial^2 N^b}{\partial x_k^2} + \rho v_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{47}$$

10 まとめ

Navier-Stokes 方程式を SUPG 法を用いて定式化した。
SUPG 定式化で Newton-Raphson 法を用いた場合は、kinematic viscocity $\nu(=\mu/\rho)$ が小さくなると発散した。
そこで、Newton-Raphson 法はあきらめ Picard の反復法を用いたところ、さらに小さい ν の場合でも収束することが分かった。

11 参考文献

[1] Tayfun E. Tezduyar, ”Calculation of the stabilization parameters in SUPG and PSPG formulations”, Mecanica Computacional Vol. XXI, S.R.Idelsohn, V.E. Sonzogni and A. Cardona (Eds.) Santa Fe-Parana, Argentina, October 2002, pp. 1-18
[2] Y. Bazilevs, V.M. Calo, J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, A. Reali, G. Scovazzi, ”Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197, 2007, pp.173 - 201