Mooney-Rivlin Hyperelastic Model Analysis by Total Lagrangian FEM

ryujimiya

2020 年 06 月 05 日

1　はじめに

Mooney-Rivlin 超弾性体に対して Total Lagrange 法を用いた FEM 定式化を行う。

2　Total Lagrange 法

第 2Piola Kirchhoff 応力を用いた弱形式は、

$$\int_V \delta \boldsymbol{u} \rho_0 \left. \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{X}} dV + \int_V \boldsymbol{S} : \delta \boldsymbol{E} dV = \int_V \delta \boldsymbol{u} \rho_0 \boldsymbol{g} dV + \int_S \tilde{\boldsymbol{t}} \delta \boldsymbol{u} dS \tag{1}$$

$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル、$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトル、ρ_0 は密度、$\boldsymbol{S}$ は第 2Piola Kirchhoff 応力テンソル、$\boldsymbol{E}$ は Green-Lagrange のひずみテンソル、$\boldsymbol{g}$ は加速度ベクトル、$\tilde{\boldsymbol{t}}$ は外力の応力ベクトルである。
右辺第 2 項は、

$$\int_V \boldsymbol{S} : \delta \boldsymbol{E} dV = Q_i^a \delta u_i^a \tag{2}$$

Q_i^aを内力ベクトルと呼ぶ。
$\delta \overline{\boldsymbol{E}}$ を次のように定義する。

$$\delta \overline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}^T \delta \boldsymbol{F} \tag{3}$$

ここで、$\boldsymbol{F}$ は変形勾配テンソルであり、成分表示すると、

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \tag{4}$$

$$\delta F_{ij} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \tag{5}$$

である。
$\delta \overline{\boldsymbol{E}}$ を成分表示すると、

$$
\begin{aligned}
\delta\overline{E}_{ij} &= F_{hi}\delta F_{hj} \\
&= \left(\delta_{hi} + \frac{\partial u_h}{\partial X_i}\right)\frac{\partial \delta u_h}{\partial X_j} \\
&= \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_h}{\partial X_j}\frac{\partial u_h}{\partial X_i}
\end{aligned}
$$

δu の添え字が i になるように添え字を入れ替えると、

$$
\delta\overline{E}_{gh} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}\delta_{ig} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}\frac{\partial u_i}{\partial X_g} \tag{6}
$$

$\delta\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{u}$ が次のように離散化されているとする。

$$
\begin{aligned}
\delta u_i &= N^p \delta u_i^p \\
u_i &= N^r u_i^r
\end{aligned} \tag{7}
$$

ただし、全体節点番号 a、b は要素内節点番号 p、q に対応するものとする。
そうすると、

$$
\begin{aligned}
\delta\overline{E}_{gh} &= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\delta u_i^p \delta_{ig} + \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\delta u_i^p \frac{\partial N^r}{\partial X_g} u_i^r \\
&= \left(\frac{\partial N^p}{\partial X_h}\delta_{ig} + \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\frac{\partial N^r}{\partial X_g}u_i^r\right)\delta u_i^p \\
&= B_{pigh}\delta u_i^p && (8) \\
B_{pigh} &= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\delta_{ig} + \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\frac{\partial N^r}{\partial X_g}u_i^r && (9) \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\left(\delta_{ig} + \frac{\partial N^r}{\partial X_g}u_i^r\right) \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\left(\delta_{ig} + \frac{\partial u_i}{\partial X_g}\right) \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}F_{ig} && (10)
\end{aligned}
$$

これを用いると要素内の内力は次のように書ける。

$$
Q_{ei}^p = \int_{V_e} S_{gh} B_{pigh} dV \tag{11}
$$

内力はこれを要素毎に足し合わせたものであり、

$$
Q_i^a = \sum_e Q_{ei}^a \tag{12}
$$

また、

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_h}{\partial X_i}\frac{\partial u_h}{\partial X_j}\right) \tag{13}$$

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_h}{\partial X_i}\frac{\partial u_h}{\partial X_j} + \frac{\partial u_h}{\partial X_i}\frac{\partial \delta u_h}{\partial X_j}\right)$$

$$\delta E_{gh} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_g}{\partial X_h} + \frac{\partial \delta u_h}{\partial X_g} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_g}\frac{\partial u_i}{\partial X_h} + \frac{\partial u_i}{\partial X_g}\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}\right) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}\left(\delta_{ig} + \frac{\partial u_i}{\partial X_g}\right) + \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_g}\left(\delta_{ih} + \frac{\partial u_i}{\partial X_h}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_h}F_{ig} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_g}F_{ih}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N^p}{\partial X_h}F_{ig} + \frac{\partial N^p}{\partial X_g}F_{ih}\right)\delta u_i^p$$

$$= \frac{1}{2}\left(B_{pigh} + B_{pihg}\right)\delta u_i^p \tag{15}$$

ここで、δu_i^p は任意だから、次の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} = \frac{1}{2}\left(B_{pigh} + B_{pihg}\right) \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{E}_{gh}}{\partial u_i^p} + \frac{\partial \overline{E}_{hg}}{\partial u_i^p}\right) \qquad \text{((8) 式より)} \tag{17}$$

3 超弾性体

超弾性体は変形やひずみの成分で微分することにより共役な応力成分が得られる弾性ポテンシャル W が存在する物質である。

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \tag{18}$$

Green-Lagrange のひずみ $\boldsymbol{E}$ は、右 Cauchy Green 変形テンソル $\boldsymbol{C}$ を用いて、

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) \tag{19}$$

と表せるから、

$$S_{ij} = 2\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \tag{20}$$

W は $\boldsymbol{C}$ の主値の関数としてあらわすことができる。主値は主不変量の関数なので、W も $\boldsymbol{C}$ の主不変量の関数で表される。

$$
\begin{aligned}
W(\boldsymbol{C}) &= W(\mathrm{I}_C, \mathrm{II}_C, \mathrm{III}_C) && (21)\\
\mathrm{I}_C &= \mathrm{tr}\boldsymbol{C} && (22)\\
\mathrm{II}_C &= \frac{1}{2}\left\{\left(\mathrm{tr}\boldsymbol{C}\right)^2 - \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}^2\right)\right\} && (23)\\
\mathrm{III}_C &= \det\boldsymbol{C} && (24)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{C}$ の主変量の微分を求めると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{I}_C}{\partial C_{ij}} &= \frac{\partial C_{kk}}{\partial C_{ij}}\\
&= \delta_{ij} && (25)\\
\frac{\partial \mathrm{II}_C}{\partial C_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial C_{ij}}\left\{\frac{1}{2}\left(C_{kk}C_{ll} - C_{kl}C_{lk}\right)\right\}\\
&= \delta_{ij}C_{kk} - C_{ij}\\
&= \delta_{ij}\mathrm{I}_C - C_{ij} && (26)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ij}}$ を求める。
Cayley-Hamilton の定理より

$$
\boldsymbol{C}^3 - \mathrm{I}_C\boldsymbol{C}^2 + \mathrm{II}_C\boldsymbol{C} - \mathrm{III}_C\boldsymbol{I} = 0 \tag{27}
$$

両辺の trace をとって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}^3 - \mathrm{I}_C\boldsymbol{C}^2 + \mathrm{II}_C\boldsymbol{C}\right) - 3\mathrm{III}_C &= 0\\
3\mathrm{III}_C &= \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}^3 - \mathrm{I}_C\boldsymbol{C}^2 + \mathrm{II}_C\boldsymbol{C}\right) && (28)
\end{aligned}
$$

成分表示すると、

$$
3\mathrm{III}_C = C_{ke}C_{ef}C_{fk} - \mathrm{I}_C C_{ke}C_{ek} + \mathrm{II}_C C_{kk} \tag{29}
$$

両辺を C_{ij} で微分すると、

$$
\begin{aligned}
3\frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ij}} &= 3C_{ik}C_{kj} - 3\mathrm{I}_C C_{ij} + 3\mathrm{II}_C\delta_{ij}\\
\frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ij}} &= C_{ik}C_{kj} - \mathrm{I}_C C_{ij} + \mathrm{II}_C\delta_{ij} && (30)\\
\frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial \boldsymbol{C}} &= \frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ij}}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\\
&= \boldsymbol{C}^2 - \mathrm{I}_C\boldsymbol{C} + \mathrm{II}_C\boldsymbol{I}\\
&= \boldsymbol{C}^{-1}\left(\boldsymbol{C}^3 - \mathrm{I}_C\boldsymbol{C}^2 + \mathrm{II}_C\boldsymbol{C}\right)\\
&= \boldsymbol{C}^{-1}\left(\mathrm{III}_C\boldsymbol{I}\right)\\
&= \mathrm{III}_C\boldsymbol{C}^{-1} && (31)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$\frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ij}} = \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} \tag{32}$$

4　非圧縮性超弾性体

　非圧縮性超弾性体の解析では、Lagrange 未定乗数を導入した弾性ポテンシャル関数を用いる。
非圧縮の拘束条件を満たすとき 0 の値をとるような ψ を定義する。

$$\begin{aligned} \psi(\mathrm{III}_C) \text{ は } \mathrm{III}_C = 1 \text{ で } \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} = 1 \end{aligned} \tag{33}$$

ψ としては、

$$\psi = \mathrm{III}_C - 1 \tag{34}$$

などが用いられる。
ひずみのエネルギーの総和は、

$$\overline{\Phi} = \int_V W + \lambda \psi dV \tag{35}$$

外力も含めてこれが極値をとった時を考えると、Lagrange 未定乗数を含む仮想仕事式は、

$$\delta \overline{\Phi} = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \boldsymbol{u}} \delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \lambda} \delta \lambda = \int_S \tilde{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS + \int_V \rho_0 \boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV \tag{36}$$

変位場、未定乗数がそれぞれ離散的な値 u_i^a、λ^c で表されているとする。
仮想仕事式の左辺は、

$$\begin{aligned} \delta \overline{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_i^a} \delta u_i^a + \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \lambda^c} \delta \lambda^c \\ &= \{Q\}\{\delta u\} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \{Q\} &= \begin{bmatrix} \{Q^U\}_i^a \\ \{Q^\lambda\}^c \end{bmatrix} \\ \{Q^U\}_i^a &= \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial u_i^a} \\ \{Q^\lambda\}^c &= \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \lambda^c} \\ \{\delta u\} &= \begin{bmatrix} \delta u_i^a \\ \delta \lambda^c \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{38}$$

$\{Q\}$ は節点等価内力ベクトルと呼ばれる。
仮想仕事式の右辺は、

$$\int_S \tilde{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS + \int_V \rho_0 \boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV = \{F^U\}_i^a \delta u_i^a \tag{39}$$

したがって、仮想仕事式は、

$$\{\delta u\}\{Q\} = \{\delta u\}\{F\} \tag{40}$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} \{F^U\}_i^a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

任意の $\{\delta u\}$ について成り立つことから、

$$\{Q\} = \{F\} \tag{42}$$

内力ベクトルを求める。
要素 V_e 内で $\boldsymbol{u}$ が補間関数 N を用いて、λ が補間関数 M を用いて次のように補間されているとする。

$$\begin{aligned} u_i &= N^p u_i^p \\ \lambda &= M^r \lambda^r \end{aligned} \tag{43}$$

また、要素内での変位節点 p は全体節点 a であるとし、要素内での未定乗数節点 r は全体節点 c であるとする。
変位の節点等価内力ベクトル $\{Q^U\}_i^a$ は、

$$\{Q^U\}_i^a = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial u_i^a} \tag{44}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_i^a}\int_V (W + \lambda\psi)\, dV$$

$$= \sum_e \frac{\partial}{\partial u_i^p}\int_{V_e} (W + \lambda\psi)\, dV$$

$$= \sum_e \int_{V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda\frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}}\right)\frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p} dV \tag{45}$$

$$= \sum_e \int_{V_e} 2\left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda\frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}}\right)\frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} dV$$

$$= \sum_e \int_{V_e} 2\left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda\frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{E}_{gh}}{\partial u_i^p} + \frac{\partial \overline{E}_{hg}}{\partial u_i^p}\right) dV$$

$$= \sum_e \int_{V_e} 2\left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda\frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}}\right)\frac{\partial \overline{E}_{gh}}{\partial u_i^p} dV$$

$$= \sum_e \int_{V_e} S_{gh} B_{pigh} dV \tag{46}$$

$$= \sum_e \{Q_e^U\}_i^p \tag{47}$$

$$
\begin{aligned}
\{Q_e^U\}_i^p &= \int_{V_e} S_{gh} B_{pigh} dV && (48)\\
B_{pigh} &= \frac{\partial \overline{E}_{gh}}{\partial u_i^p} \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\left(\delta_{ig} + \frac{\partial N^r}{\partial X_g} u_i^r\right) \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h} F_{ig} && (49)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij} &= 2\left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial C_{ij}}\right) && (50)\\
&= S_{ij}^U + S_{ij}^\lambda && (51)\\
S_{ij}^U &= 2\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} && (52)\\
&= 2\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}_C} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}_C}\mathrm{I}_C\right)\delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}_C} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}_C}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} && (53)\\
S_{ij}^\lambda &= 2\lambda \frac{\partial \psi}{\partial C_{ij}} && (54)\\
&= 2\lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C}\frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ij}} \\
&= 2\lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C}\mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} && (55)
\end{aligned}
$$

未定乗数の内力ベクトルを求める。

$$
\begin{aligned}
\{Q^\lambda\}^c &= \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \lambda^c} && (56)\\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda^c}\int_V (W + \lambda\psi)\, dV \\
&= \sum_e \frac{\partial}{\partial \lambda^r}\int_{V_e} (W + M^r \lambda^r \psi)\, dV \\
&= \sum_e \int_{V_e} M^r \psi dV && (57)\\
&= \sum_e \{Q_e^\lambda\}^r && (58)\\
\{Q_e^\lambda\}^r &= \int_{V_e} M^r \psi dV && (59)
\end{aligned}
$$

Newton-Raphson 法を用いる。

接線剛性行列は、

$$[K] = \begin{bmatrix} [K^{UU}]_{ij}^{ab} & [K^{U\lambda}]_i^{ad} \\ [K^{\lambda U}]_j^{cb} & [K^{\lambda\lambda}]^{cd} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\{Q^U\}_i^a}{\partial u_j^b} & \dfrac{\partial\{Q^U\}_i^a}{\partial \lambda^d} \\ \dfrac{\partial\{Q^\lambda\}^c}{\partial u_j^b} & \dfrac{\partial\{Q^\lambda\}^c}{\partial \lambda^d} \end{bmatrix} \tag{60}$$

これは、次のような要素剛性行列を足し合わせたものである。

$$[K] = \sum_e [K_e] \tag{61}$$

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_e^{UU}]_{ij}^{pq} & [K_e^{U\lambda}]_i^{ps} \\ [K_e^{\lambda U}]_j^{rq} & [K_e^{\lambda\lambda}]^{rs} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\{Q^U\}_i^p}{\partial u_j^q} & \dfrac{\partial\{Q^U\}_i^p}{\partial \lambda^s} \\ \dfrac{\partial\{Q^\lambda\}^r}{\partial u_j^q} & \dfrac{\partial\{Q^\lambda\}^r}{\partial \lambda^s} \end{bmatrix} \tag{62}$$

$[K^{UU}]$ を求める。

$$[K_e^{UU}]_{ij}^{pq} = \frac{\partial\{Q^U\}_i^p}{\partial u_j^q} \tag{63}$$

$$\{Q^U\}_i^p = \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial u_i^p}$$

$$= \int_{V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p} dV \tag{64}$$

であるから、

$$[K_e^{UU}]_{ij}^{pq} = \int_{V_e} \frac{\partial}{\partial u_j^q} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p} \right\} dV \tag{65}$$

$$= \int_{V_e} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} + \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} \right) \frac{\partial C_{ef}}{\partial u_j^q} \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p} + \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial^2 C_{gh}}{\partial u_i^p \partial u_j^q} dV$$

$$= \int_{V_e} 4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} + \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} \right) \frac{\partial E_{ef}}{\partial u_j^q} \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial^2 E_{gh}}{\partial u_i^p \partial u_j^q} dV$$

$$= \int_{V_e} C_{ghef} \frac{\partial E_{ef}}{\partial u_j^q} \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} + S_{gh} \frac{\partial^2 E_{gh}}{\partial u_i^p \partial u_j^q} dV \tag{66}$$

$$= \int_{V_e} \overline{C}_{ghef} \frac{\partial \overline{E}_{ef}}{\partial u_j^q} \frac{\partial \overline{E}_{gh}}{\partial u_i^p} + S_{gh} \frac{\partial^2 \overline{E}_{gh}}{\partial u_i^p \partial u_j^q} dV \tag{67}$$

$$(C_{ghef} \frac{\partial E_{ef}}{\partial u_j^q} = \overline{C}_{ghef} \frac{\partial \overline{E}_{ef}}{\partial u_j^q})$$

$$= \int_{V_e} \overline{C}_{ghef} B_{qjef} B_{pigh} + S_{gh} \frac{\partial N^p}{\partial X_g} \frac{\partial N^q}{\partial X_h} \delta_{ij} dV \tag{68}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{E}_{gh}}{\partial u_i^p} &= B_{pigh} \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_h}\left(\delta_{ig} + \frac{\partial u_i}{\partial X_g}\right) \\
\frac{\partial^2 \overline{E}_{gh}}{\partial u_i^p \partial u_j^q} &= \frac{\partial B_{qjgh}}{\partial u_i^p} \\
&= \frac{\partial}{\partial u_i^p}\left\{\frac{\partial N^q}{\partial X_h}\left(\delta_{jg} + \frac{\partial u_j}{\partial X_g}\right)\right\} \\
&= \frac{\partial N^p}{\partial X_g}\frac{\partial N^q}{\partial X_h}\delta_{ij}
\end{aligned}$$

を用いた。
また、

$$C_{ghef} = 4\left(\frac{\partial^2 W}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} + \lambda\frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}}\right) \tag{69}$$

$$\overline{C}_{ghef} = \frac{1}{2}(C_{ghef} + C_{ghfe}) \tag{70}$$

である。
(67) 式をひずみポテンシャル由来のものと、非圧縮の拘束条件由来のものに分ける。

$$C_{ghef} = C^U_{ghef} + C^\lambda_{ghef} \tag{71}$$

$$C^U_{ghef} = 4\frac{\partial^2 W}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}}$$

$$C^\lambda_{ghef} = 4\lambda\frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} \tag{72}$$

また、

$$\overline{C}^U_{ghef} = \frac{1}{2}\left(C^U_{ghef} + C^U_{ghfe}\right)$$

$$\overline{C}^\lambda_{ghef} = \frac{1}{2}\left(C^\lambda_{ghef} + C^\lambda_{ghfe}\right) \tag{73}$$

とすると、

$$\overline{C}_{ghef} = \overline{C}^U_{ghef} + \overline{C}^\lambda_{ghef} \tag{74}$$

(74) 式第 1 項の $\overline{C}^U$ 、あるいは (71) 式 C^U は物質の構成則によって定まる。
Mooney-Rivlin モデルの C^U（構成則テンソル) については後述する。
ここではまず、(74) 式第 2 項の $\overline{C}^\lambda$ を求める。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} &= \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{gh}} \right) \\
&= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{III}_C^2} \frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ef}} \frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{gh}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \frac{\partial^2 \mathrm{III}_C}{\partial C_{ef} \partial C_{gh}} \\
&= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{III}_C^2} \mathrm{III}_C^2 \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ef} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{gh} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \frac{\partial^2 \mathrm{III}_C}{\partial C_{ef} \partial C_{gh}} \qquad (75) \\
\frac{\partial^2 \mathrm{III}_C}{\partial C_{ef} \partial C_{gh}} &= \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \left(\frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{gh}} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial C_{ef}} \left\{ \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{gh} \right\} \\
&= \frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ef}} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{gh} + \mathrm{III}_C \frac{\partial \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{gh}}{\partial C_{ef}} \\
&= \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ef} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{gh} + \mathrm{III}_C \frac{\partial \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{gh}}{\partial C_{ef}} \qquad (76)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} \\
\left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ij} C_{jg} = \delta_{ig}
\end{gathered}
$$

両辺を C_{kl} で微分して、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ij} C_{jg}}{\partial C_{kl}} &= \frac{\partial \delta_{ig}}{\partial C_{kl}} \\
&= 0 \\
\frac{\partial \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ij}}{\partial C_{kl}} C_{jg} + \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ij} \frac{\partial C_{jg}}{\partial C_{kl}} &= 0 \\
\frac{\partial \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ij}}{\partial C_{kl}} C_{jg} &= - \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ij} \delta_{jk} \delta_{gl} \\
\frac{\partial \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ij}}{\partial C_{kl}} C_{jg} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{gh} &= - \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{gh} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ik} \delta_{gl} \\
\frac{\partial \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ij}}{\partial C_{kl}} \delta_{jh} &= - \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ik} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{lh} \qquad (77)
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\frac{\partial^2 \mathrm{III}_C}{\partial C_{ef} \partial C_{gh}} = \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ef} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{gh} - \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{ge} \left(\boldsymbol{C}^{-1} \right)_{fh} \qquad (78)
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
C^{\lambda}_{ghef} &= 4\lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial C_{gh} \partial C_{ef}} \\
&= 4\lambda \left[\mathrm{III}_C^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{III}_C^2} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \left\{ \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} - \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ge} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{fh} \right\} \right] \\
&= 4\lambda \mathrm{III}_C \left\{ \mathrm{III}_C \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{III}_C^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \right\} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} - 4\lambda \mathrm{III}_C \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ge} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{fh} \qquad (79)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{C}^{\lambda}_{ghef} &= 4\lambda \mathrm{III}_C \left\{ \mathrm{III}_C \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{III}_C^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \right\} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} \\
&\quad \text{- } 2\ \lambda \mathrm{III}_C \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \left\{ \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ge} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{fh} + \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gf} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{eh} \right\} \qquad (80)
\end{aligned}
$$

$[K^{U\lambda}]$ を求める。

$$
\begin{aligned}
[K_e^{U\lambda}]_i^{ps} &= \frac{\partial \{Q^U\}_i^p}{\partial \lambda^s} \qquad (81) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda^s} \int_{V_e} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}} \right) \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p} dV \\
&= \int_{V_e} M^s \frac{\partial \psi}{\partial C_{gh}} \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_i^p} dV \qquad (82) \\
&= \int_{V_e} 2M^s \frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{gh}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} dV \\
&= \int_{V_e} 2M^s \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_i^p} dV \\
&= \int_{V_e} 2M^s \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} \frac{\partial \overline{E}_{gh}}{\partial u_i^p} dV \\
&= \int_{V_e} 2M^s \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} B_{pigh} dV \qquad (83)
\end{aligned}
$$

$[K^{\lambda U}]$ を求める。

$$
\begin{aligned}
[K_e^{\lambda U}]_j^{rq} &= \frac{\partial \{Q^{\lambda}\}^r}{\partial u_j^q} && (84) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_j^q} \int_{V_e} M^r \psi dV \\
&= \int_{V_e} M^r \frac{\partial \psi}{\partial u_j^q} dV && (85) \\
&= \int_{V_e} M^r \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{gh}} \frac{\partial C_{gh}}{\partial u_j^q} dV \\
&= \int_{V_e} 2M^r \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} \frac{\partial E_{gh}}{\partial u_j^q} dV \\
&= \int_{V_e} 2M^r \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} \frac{\partial \overline{E}_{gh}}{\partial u_j^q} dV \\
&= \int_{V_e} 2M^r \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{III}_C} \mathrm{III}_C \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} B_{qjgh} dV && (86)
\end{aligned}
$$

$[K^{\lambda\lambda}]$ を求める。

$$
\begin{aligned}
[K_e^{\lambda\lambda}]^{rs} &= \frac{\partial \{Q^{\lambda}\}^r}{\partial \lambda^s} && (87) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda^s} \int_{Ve} M^r \psi dV \\
&= 0 && (88)
\end{aligned}
$$

5 Mooney-Rivlin モデル

Mooney-Rivlin モデルのポテンシャルは、

$$
\begin{aligned}
W &= c_1(\mathrm{I}_C - 3) + C_2(\mathrm{II}_C - 3) && (89) \\
\mathrm{III}_C &= 1 && (90)
\end{aligned}
$$

と表される。

$$
\begin{aligned}
S_{gh}^U &= \frac{\partial W}{\partial E_{gh}} = 2\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} \\
&= 2c_1 \frac{\partial \mathrm{I}_C}{\partial C_{gh}} + 2c_2 \frac{\partial \mathrm{II}_C}{\partial C_{gh}} \\
&= 2c_1 \delta_{gh} + 2c_2(\mathrm{I}_C \delta_{gh} - C_{gh}) \\
&= 2(c_1 + c_2 \mathrm{I}_C)\delta_{gh} - 2c_2 C_{gh} && (91)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^U_{ghef} &= \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ef}\partial E_{gh}} \\
&= 2\frac{\partial}{\partial C_{ef}}\left(2\frac{\partial W}{\partial C_{gh}}\right) \\
&= 2\frac{\partial S_{gh}}{\partial C_{ef}} \\
&= 2\frac{\partial}{\partial C_{ef}}\Big\{2(c_1 + c_2\mathrm{I}_C)\delta_{gh} - 2c_2 C_{gh}\Big\} \\
&= 4c_2\delta_{ef}\delta_{gh} - 4c_2\delta_{ge}\delta_{fh} \qquad (92)\\
\overline{C}^U_{ghef} &= \frac{1}{2}(C^U_{ghef} + C^U_{ghfe}) \\
&= 4c_2\delta_{ef}\delta_{gh} - 2c_2\delta_{ge}\delta_{fh} - 2c_2\delta_{gf}\delta_{eh} \qquad (93)
\end{aligned}
$$

6　低減不変量

Mooney-Rivlin モデルの第 2Piola-Kirchhoff 応力を求める。(53) 式に不定静水圧 p を加えた応力は、

$$
S_{ij} = -p\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} + 2\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}_C} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}_C}\mathrm{I}_C\right)\delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}_C}C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}_C}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} \qquad (94)
$$

Mooney-Rivlin モデルのポテンシャル (87) 式を代入すると、

$$
S_{ij} = -p\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} + 2\left\{(c_1 + c_2\mathrm{I}_C)\delta_{ij} - c_2 C_{ij}\right\} \qquad (95)
$$

外力が作用せず無変形すなわち、

$$
C_{ij} = \delta_{ij} \qquad (96)
$$

のとき、

$$
S_{ij} = -p\delta_{ij} + (2c_1 + 4c_2)\delta_{ij} \qquad (97)
$$

外力が作用しない ($S_{ij} = 0$) とき不定静水圧 p は、

$$
p = 2c_1 + 4c_2 \neq 0 \qquad (98)
$$

つまり、Mooney-Rivlin モデルのポテンシャルとして (87) 式を用いる場合、無変形であっても応力が 0 のとき不定静水圧が 0 とならない。
この不合理を解消するために主不変量の関数 $W(\mathrm{I}_C, \mathrm{II}_C, \mathrm{III}_C)$ であったものを低減不変量の関数 $W(\bar{\mathrm{I}}_C, \bar{\mathrm{II}}_C, \overline{\mathrm{III}}_C)$ に置き換える。

まず修正右 Cauchy-Green 変形テンソル $\overline{\boldsymbol{C}}$ を導入する。

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{C}} &= \overline{\boldsymbol{F}}^T\overline{\boldsymbol{F}} \qquad (99)\\
\overline{\boldsymbol{F}} &= J^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{F} \qquad (100)\\
\overline{\boldsymbol{C}} &= J^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{C} \qquad (101)\\
J &= \det\boldsymbol{F} \qquad (102)
\end{aligned}
$$

ここに、$\overline{\boldsymbol{F}}$ は Flory の変形勾配テンソルで

$$\det\overline{\boldsymbol{F}} = 1 \tag{103}$$

が成り立ち体積変形の影響を受けない。
$\overline{\boldsymbol{C}}$ の主不変量は、

$$\bar{\mathrm{I}}_C = \frac{\mathrm{I}_C}{\mathrm{III}^{\frac{1}{3}}} \tag{104}$$

$$\bar{\mathrm{II}}_C = \frac{\mathrm{II}_C}{\mathrm{III}_C^{\frac{2}{3}}} \tag{105}$$

$$\bar{\mathrm{III}}_C = 1 \tag{106}$$

この $\overline{\boldsymbol{C}}$ の主不変量が先ほど言及した低減不変量 (reduced invariants) である。
W の主不変量に関する微分は、

$$\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}_C} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}\frac{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}{\partial \mathrm{I}_C} = \frac{1}{\mathrm{III}_C^{\frac{1}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C} \tag{107}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}_C} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}\frac{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}{\partial \mathrm{II}_C} = \frac{1}{\mathrm{III}_C^{\frac{2}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C} \tag{108}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}_C} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}\frac{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}{\partial \mathrm{III}_C} + \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}\frac{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}{\partial \mathrm{III}_C} = -\frac{1}{3}\frac{\mathrm{I}_C}{\mathrm{III}_C^{\frac{4}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C} - \frac{2}{3}\frac{\mathrm{II}_C}{\mathrm{III}_C^{\frac{5}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C} \tag{109}$$

外力が存在せず無変形のとき、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{I} \\ \mathrm{I}_C &= 3 \\ \mathrm{II}_C &= 3 \\ \mathrm{III}_C &= 1 \end{aligned} \tag{110}$$

であるから、これを (94) 式に代入すると、

$$S_{ij} = -p + 2\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}_C} + 4\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}_C} + 2\frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}_C} \tag{111}$$

$S_{ij} = 0$ のときの不定静水圧 p は、

$$p = 2\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}_C} + 4\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}_C} + 2\frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}_C} \tag{112}$$

$$\begin{aligned} &= 2\frac{1}{1^{\frac{1}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C} + 4\frac{1}{1^{\frac{2}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C} + 2\left(-\frac{1}{3}\frac{3}{1^{\frac{4}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C} - \frac{2}{3}\frac{3}{1^{\frac{5}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{113}$$

となり、低減不変量を用いると無変形状態で応力が 0 のとき不定静水圧 $p = 0$ が満たされることが分かる。

低減不変量を用いた非圧縮性超弾性体の応力は、(108)-(110) 式を (94) 式に代入して、

$$
\begin{aligned}
S_{ij} = & -p\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} + 2\left(\frac{1}{\mathrm{III}_C^{\frac{1}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C} + \frac{1}{\mathrm{III}_C^{\frac{2}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}\mathrm{I}_C\right)\delta_{ij} \\
& -\frac{2}{\mathrm{III}_C^{\frac{2}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}C_{ij} \\
& -2\left(\frac{1}{3}\frac{\mathrm{I}_C}{\mathrm{III}_C^{\frac{4}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C} + \frac{2}{3}\frac{\mathrm{II}_C}{\mathrm{III}_C^{\frac{5}{3}}}\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}\right)\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}
\end{aligned} \tag{114}
$$

または別の表現をすると (52) 式より、

$$
S_{ij}^U = 2\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} = 2\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}\frac{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}{\partial C_{ij}} + 2\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}\frac{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}{\partial C_{ij}} \tag{115}
$$

である。

構成則テンソルは、

$$
\begin{aligned}
C_{ghef}^U &= 4\frac{\partial^2 W}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} \\
&= 4\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{I}}_C}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} + 4\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{II}}_C}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}}
\end{aligned} \tag{116}
$$

ここで使用する低減不変量の右 Cauchy-Green ひずみテンソル $\boldsymbol{C}$ に関する微分を求めておく。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}}{\partial C_{ij}} &= -\frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{4}{3}}\frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ij}} \\
&= -\frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{4}{3}}\mathrm{III}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} \\
&= -\frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} && (117) \\
\frac{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}{\partial C_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial C_{ij}}\left(\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\mathrm{I}_C\right) \\
&= \frac{\partial \mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}}{\partial C_{ij}}\mathrm{I}_C + \mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\frac{\partial \mathrm{I}_C}{\partial C_{ij}} \\
&= -\frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\mathrm{I}_C + \mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\delta_{ij} \\
&= \mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left\{\delta_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} && (118) \\
\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{I}}_C}{\partial C_{ij}\partial C_{kl}} &= \frac{\partial \mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}}{\partial C_{kl}}\left\{\delta_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} + \mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\frac{\partial}{\partial C_{kl}}\left\{\delta_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} \\
&= -\frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{4}{3}}\mathrm{III}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{kl}\left\{\delta_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} \\
&\quad + \mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left\{-\frac{1}{3}\delta_{kl}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} + \frac{1}{3}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ik}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{lj}\right\} \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{kl} - \delta_{ij}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{kl} - \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\delta_{kl} + \mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ik}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{lj}\right\} && (119)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}}{\partial C_{ij}} &= -\frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{5}{3}}\frac{\partial \mathrm{III}_C}{\partial C_{ij}} \\
&= -\frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{5}{3}}\mathrm{III}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} \\
&= -\frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} \qquad (120)\\
\frac{\partial \overline{\mathrm{II}}_C}{\partial C_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial C_{ij}}\left(\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\mathrm{II}_C\right) \\
&= \frac{\partial \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}}{\partial C_{ij}}\mathrm{II}_C + \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial \mathrm{II}_C}{\partial C_{ij}} \\
&= -\frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{5}{3}}\mathrm{III}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\mathrm{II}_C + \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}(\mathrm{I}_C\delta_{ij} - C_{ij}) \\
&= \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\left\{\mathrm{I}_C\delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} \qquad (121)\\
\frac{\partial^2 \overline{\mathrm{II}}_C}{\partial C_{ij}\partial C_{kl}} &= \frac{\partial \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}}{\partial C_{kl}}\left\{\mathrm{I}_C\delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} \\
&\quad + \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial}{\partial C_{kl}}\left\{\mathrm{I}_C\delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} \\
&= -\frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{5}{3}}\mathrm{III}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{kl}\left\{\mathrm{I}_C\delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\right\} \\
&\quad + \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\left\{\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{2}{3}(\mathrm{I}_C\delta_{kl} - C_{kl})\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij} + \frac{2}{3}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ik}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{lj}\right\} \\
&= \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\left\{\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{4}{9}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{kl}\right\} \\
&\quad + \frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\left\{(C_{ij} - \mathrm{I}_C\delta_{ij})\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{kl} + \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ij}(C_{kl} - \mathrm{I}_C\delta_{kl})\right\} \\
&\quad + \mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\left\{\frac{2}{3}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ik}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{lj} - \delta_{ik}\delta_{jl}\right\} \qquad (122)
\end{aligned}
$$

7 低減不変量を用いた Mooney-Rivlin モデル

低減不変量を用いた Mooney-Rivlin モデルのポテンシャルは、

$$
\begin{aligned}
W &= c_1\left(\bar{\mathrm{I}}_C - 3\right) + c_2\left(\overline{\mathrm{II}}_C - 3\right) \qquad (123)\\
\mathrm{III}_C &= 1 \qquad (124)
\end{aligned}
$$

と表される。

$$
\begin{aligned}
S^U_{gh} &= \frac{\partial W}{\partial E_{gh}} = 2\frac{\partial W}{\partial C_{gh}} = 2\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}\frac{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}{\partial C_{gh}} + 2\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}\frac{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}{\partial C_{gh}} \\
&= 2c_1\frac{\partial \bar{\mathrm{I}}_C}{\partial C_{gh}} + 2c_2\frac{\partial \bar{\mathrm{II}}_C}{\partial C_{gh}} \\
&= 2c_1\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left\{\delta_{gh} - \frac{1}{3}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}\right\} + 2c_2\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\left\{\mathrm{I}_C\delta_{gh} - C_{gh} - \frac{2}{3}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}\right\} \\
&= \left(\frac{2c_1}{\mathrm{III}_C^{\frac{1}{3}}} + \frac{2c_2\mathrm{I}_C}{\mathrm{III}_C^{\frac{2}{3}}}\right)\delta_{gh} - \frac{2c_2}{\mathrm{III}_C^{\frac{2}{3}}}C_{gh} - \left(\frac{1}{3}\frac{2c_1\mathrm{I}_C}{\mathrm{III}_C^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3}\frac{2c_2\mathrm{II}_C}{\mathrm{III}_C^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}
\end{aligned} \tag{125}
$$

$$
\begin{aligned}
C^U_{ghef} &= 4\frac{\partial^2 W}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} \\
&= 4c_1\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{I}}_C}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} + 4c_2\frac{\partial^2 \bar{\mathrm{II}}_C}{\partial C_{gh}\partial C_{ef}} \\
&= 4c_1\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} + \mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ge}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{fh}\right\} \\
&\quad +4c_2\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\frac{2}{3}\left\{\frac{2}{3}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} + C_{gh}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} + \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}C_{ef} + \mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ge}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{fh}\right\} \\
&\quad -\left\{4c_1\frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} + 4c_2\frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef}\right\}\delta_{gh} \\
&\quad -\left\{4c_1\frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} + 4c_2\frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}\right\}\delta_{ef} \\
&\quad +4c_2\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\delta_{gh}\delta_{ef} - 4c_2\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\delta_{ge}\delta_{hf}
\end{aligned} \tag{126}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{C}^U_{ghef} &= \frac{1}{2}(C_{ghef} + C_{ghfe}) \\
&= 4c_1\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} + \frac{1}{2}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ge}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{fh} + \frac{1}{2}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gf}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{eh}\right\} \\
&\quad +4c_2\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\frac{2}{3}\Big\{\frac{2}{3}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} + C_{gh}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} + \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}C_{ef} \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ge}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{fh} + \frac{1}{2}\mathrm{II}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gf}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{eh}\Big\} \\
&\quad -\left\{4c_1\frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef} + 4c_2\frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{ef}\right\}\delta_{gh} \\
&\quad -\left\{4c_1\frac{1}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{1}{3}}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh} + 4c_2\frac{2}{3}\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\mathrm{I}_C\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{gh}\right\}\delta_{ef} \\
&\quad +4c_2\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\delta_{gh}\delta_{ef} - 2c_2\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\delta_{ge}\delta_{hf} - 2c_2\mathrm{III}_C^{-\frac{2}{3}}\delta_{gf}\delta_{he}
\end{aligned} \tag{127}
$$

8 まとめ

Mooney-Rivlin 超弾性体に対して Total Lagrange 法を用いた FEM 定式化を行った。

9 参考文献

[1] 梅谷信行,"超弾性体の有限要素法解析",2010