

Reissner-Mindlin Plate Bending Triangular Elements

ryujimiya

2020年05月21日

1 はじめに

Discrete Kirchhoff Theory が薄板曲げの理論であったのに対し、Reissner-Mindlin の板理論は厚板曲げの理論といわれる。

本書では厚板要素を構成する。

2 Mindlin 板の曲げ理論

Reissner-Mindlin の板の仮定は、

”変形前中立面 (middle, or neutral plane) に垂直だった直線は変形後も直線である”

Reissner-Mindlin の仮定では、中立面に平行な 2 つの変位 u 、 v は、

$$u = z\theta_y(x, y) \tag{1}$$

$$v = -z\theta_x(x, y) \tag{2}$$

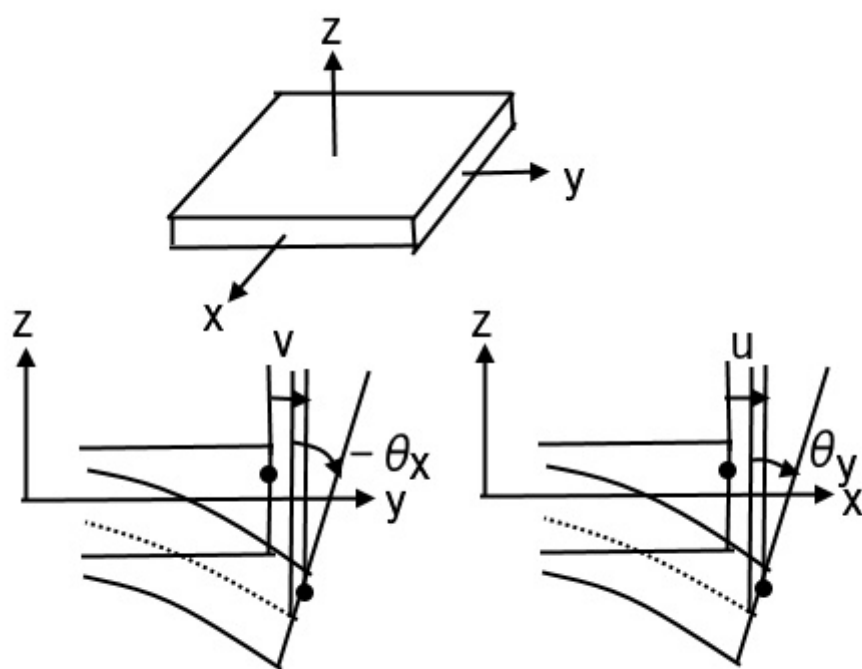


图1 Plate

曲げひずみを求める。

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(z\theta_y) = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (3)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-z\theta_x) = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(z\theta_y) + \frac{\partial}{\partial x}(-z\theta_x) \\ &= z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

曲げひずみを次のように表記する。

$$\begin{aligned} \epsilon_b &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \\ &= -z\chi \end{aligned} \quad (6)$$

$$\chi = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7)$$

χ は曲率である。

断面 (off-plane) のせん断ひずみを求める。

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(z\theta_y) + \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(-z\theta_x) + \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{aligned} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$(11)$$

応力場は平面応力を仮定 ($\sigma_{zz} = 0$) すると、

応力-ひずみ関係式は、

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_b \boldsymbol{\epsilon}_b \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \kappa \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} \quad (13)$$

$$\mathbf{C}_b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_s = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\kappa = \frac{\pi^2}{12}, \text{ or } \kappa = \frac{5}{6} \quad (16)$$

ひずみのポテンシャルエネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \boldsymbol{\sigma}_b^T \boldsymbol{\epsilon}_b dz dA + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \boldsymbol{\tau}_s^T \boldsymbol{\gamma} dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \boldsymbol{\epsilon}_b^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\epsilon}_b dz dA + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \kappa \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A z^2 \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\chi} dz dA + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \kappa \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A z^2 \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\chi} dz dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} dz dA \end{aligned} \quad (17)$$

運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho \left(z^2 \dot{\theta}_y^2 + z^2 \dot{\theta}_x^2 + \dot{w}^2 \right) dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \rho \left(h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2 \right) dA \end{aligned} \quad (18)$$

3 曲げ要素 (bending element) の形状関数

deflection と rotations を線形補間する。

$$w = \sum_{i=1}^3 N_i w_i \quad (19)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_{xi} \quad (20)$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_{yi} \quad (21)$$

$$N_i = L_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (22)$$

節点自由度ベクトル

$$\mathbf{d} = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}]^T \quad (23)$$

を用いると、

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}^T \mathbf{d} \quad (24)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}^T \quad (25)$$

χ 、 γ を求める。

$$\begin{aligned}
\chi &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & -\frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{d} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & b_1 & -c_1 & 0 & b_2 & -c_2 & 0 & b_3 & -c_3 \end{bmatrix} \mathbf{d} \tag{26}
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{B}_b \mathbf{d} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & N_3 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & -N_2 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & -N_3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} \\
&= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & N_1 & b_2 & 0 & N_2 & b_3 & 0 & N_3 \\ c_1 & -N_1 & 0 & c_2 & -N_2 & 0 & c_3 & -N_3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} \tag{28}
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{B}_s \mathbf{d} \tag{29}$$

これらを用いるとひずみエネルギーは (17) 式より、

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \frac{h^3}{12} \int_A \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\chi} dA + \frac{1}{2} \kappa h \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} dA \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \frac{h^3}{12} \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b dA + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \kappa h \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s dA \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\mathbf{K} = \frac{h^3}{12} \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b dA + \kappa h \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s dA \tag{31}$$

運動エネルギーは (18) 式より、

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \dot{w} & \dot{\theta}_x & \dot{\theta}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix} dA \\
&= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T \int_A \mathbf{N} \mathbf{C}_T \mathbf{N}^T dA \dot{\mathbf{d}} \\
&= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{N} \mathbf{C}_T \mathbf{N}^T dA \tag{33}$$

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Hamilton の原理より運動方程式は、

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \tag{35}$$

shear locking を回避するために、剛性マトリクス \mathbf{K} のうちせん断ひずみに関する項 ((31) 式第 2 項) は 1 点 Gauss 積分する。

Mindlin 板の場合の低減積分は剛性マトリクスの一部分だけを低減積分することから選択的低減積分と呼ばれる。

4 膜要素 (membrane element) – CST (Constant Strain Triangular, 定ひずみ三角形) 要素

「Plate Bending Theory of Discrete Kirchhoff Triangle (DKT) elements」を参照。

7 まとめ

Reissner-Mindlin Plate Theory を適用した厚板曲げ要素を構成した。

8 参考文献

[1]what-when-how,In Depth Tutorials and Information, "FEM for Plates and Shells (Finite Element Method) Part 1"

[2]what-when-how,In Depth Tutorials and Information, "FEM for Plates and Shells (Finite Element Method) Part 2"