

# Geometrically Nonlinear MITC3 Plate Formulation (St.Venant-Kirchhoff Model)

ryujimiya

2020年06月16日

## 1 はじめに

「Mixed Interpolation of Tensorial Components(MITC) Triangular Elements for Linear Plate Bending」では線形弾性体について MITC3 シェル要素の定式化を行った。

本書では幾何学的非線形、特に有限回転を考慮した Total Lagrange 法による MITC3 シェル要素の定式化を行っている。

一例として St.Venant-Kirchhoff モデルに適用している。

## 2 有限回転を考慮した degenerated シェル要素

中立面 (mid-surface) の節点座標はグローバル直角座標  $x_i$ 、基底  $\mathbf{e}_i$ 、( $i = 1, 2, 3$ ) すなわち ( $i = x, y, z$ ) によって表される。

mid-surface の時刻  $t$  の位置ベクトル  $\mathbf{x}^t$  は、

$$\mathbf{x}^t(r_1, r_2, r_3) = N_k \mathbf{x}_k^t + \frac{r_3}{2} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}^t \quad (1)$$

$r_i (i = 1, 2, 3)$  はシェルの局所座標で、 $r_1 = r$ ,  $r_2 = s$ ,  $r_3 = t$  である。

面積座標を  $L_i (i = 1, 2, 3)$  とすると  $r_1$ 、 $r_2$  は、

$$r_1 = L_2$$

$$r_2 = L_3$$

$N_i$  は中立面の補関数で、

$$N_1 = 1 - r_1 - r_2 \quad (2)$$

$$N_2 = r_1 \quad (3)$$

$$N_3 = r_2 \quad (4)$$

$\mathbf{V}_{ni}$  はディレクターベクトルで中立面の節点上に定義される。また、 $|\mathbf{V}_{nk}| = 1$

$h_k$  は板の厚さである。

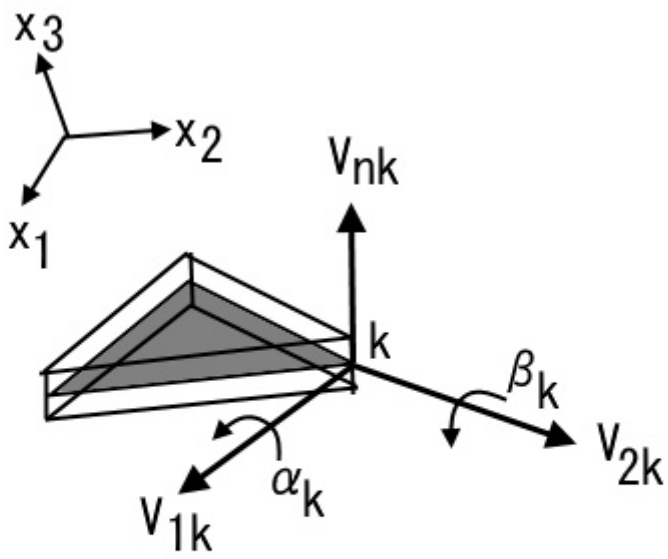


図1 degenerated シェル要素

ディレクターに垂直なベクトル  $\mathbf{V}_{1k}$ 、 $\mathbf{V}_{2k}$  を定義する。  
 $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_{nk} \neq 0$  のとき、

$$\mathbf{V}_{1k} = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_{nk}}{|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_{nk}|} \quad (5)$$

$$\mathbf{V}_{2k} = \mathbf{V}_{nk} \times \mathbf{V}_{1k} \quad (6)$$

$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_{nk} = 0$  のとき、

$$\mathbf{V}_{1k} = \mathbf{e}_3 \quad (7)$$

$$\mathbf{V}_{2k} = \mathbf{e}_1 \quad (8)$$

変形に関する次の2つの仮定を行う。

- (a) ディレクターベクトルは変形後も直線となるとする。
- (b) 厚さは変形前後で一定であるとする。

時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  の間の変位の増分 (incremental displacements)  $\mathbf{u}$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x}^{t+\Delta t} - \mathbf{x}^t \\ &= N_k \mathbf{x}_k^{t+\Delta t} + \frac{r_3}{2} N_k h_k (\mathbf{V}_{nk}^{t+\Delta t} - \mathbf{V}_{nk}^t) \end{aligned} \quad (9)$$

$t$  から  $t + \Delta t$  のディレクターの回転は、

$$\mathbf{V}_{nk}^{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{k_t}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_{nk}^t \quad (10)$$

と表すことができる。 $\mathbf{R}_{k_t}^{t+\Delta t}$  は回転テンソル (rotation tensor) である。

Argyris の擬回転ベクトル (pseudo-rotation vector、軸性回転ベクトル)  $\boldsymbol{\theta}_k$  がディレクター方向成分を持たない、すなわち

$$\boldsymbol{\theta}_k = \alpha_k \mathbf{V}_{1k} + \beta_k \mathbf{V}_{2k} \quad (11)$$

と仮定する。 $\boldsymbol{\theta}_k$  に対応する反対称テンソル (skew symmetric tensor)  $\boldsymbol{\Theta}_k$  が定義できる。

$$\boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{x} = \boldsymbol{\Theta}_k \mathbf{x} \quad (12)$$

$\mathbf{x}$  は回転軸について回転する任意のベクトルである。

今回の  $\boldsymbol{\theta}_k$  に対する  $\boldsymbol{\Theta}_k$  は、

$$\boldsymbol{\Theta}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_k \\ 0 & 0 & -\alpha_k \\ -\beta_k & \alpha_k & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

反対称テンソルを用いた回転テンソルは Euler-Rodrigues formula の Argyris 形式より、

$$\mathbf{R}_{kt}^{t+\Delta t} = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \Theta_k + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \left( \frac{\theta_k}{2} \right)}{\left( \frac{\theta_k}{2} \right)^2} \Theta_k^2 \quad (14)$$

$$\theta_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (15)$$

回転テンソルの級数展開は、

$$\mathbf{R}_{kt}^{t+\Delta t} = \mathbf{I} + \Theta_k + \frac{1}{2!} \Theta_k^2 + \dots \quad (16)$$

また、

$$\Theta_k \mathbf{V}_{nk} = \boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{V}_{nk} \quad (17)$$

$$\Theta_k \mathbf{V}_{1k} = \boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{V}_{1k} \quad (18)$$

$$\Theta_k \mathbf{V}_{2k} = \boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{V}_{2k} \quad (19)$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{nk}^{t+\Delta t} - \mathbf{V}_{nk}^t &= (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \mathbf{V}_{nk}^t \\ &= \Theta_k \mathbf{V}_{nk}^t + \frac{1}{2} \Theta_k^2 \mathbf{V}_{nk}^t \\ &= \boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{V}_{nk}^t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_k \times (\boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{V}_{nk}^t) \\ &= \boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{V}_{nk}^t - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\theta}_k|^2 \mathbf{V}_{nk}^t \\ &= (-\alpha_k \mathbf{V}_{2k}^t + \beta_k \mathbf{V}_{1k}^t) - \frac{1}{2} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \mathbf{V}_{nk}^t \end{aligned} \quad (20)$$

変位の増分  $\mathbf{u}$  は (20) 式を (9) 式に代入して、

$$\mathbf{u} = N_k \mathbf{u}_k + \frac{r_3}{2} N_k h_k (-\alpha_k \mathbf{V}_{2k}^t + \beta_k \mathbf{V}_{1k}^t) - \frac{r_3}{4} N_k h_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \mathbf{V}_{nk}^t \quad (21)$$

または、線形項  $\mathbf{u}_I$ 、非線形（2次）項  $\mathbf{u}_{II}$  に分解して次のように書ける。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_{II} \quad (22)$$

$$\mathbf{u}_I = N_k \mathbf{u}_k + \frac{r_3}{2} N_k h_k (-\alpha_k \mathbf{V}_{2k}^t + \beta_k \mathbf{V}_{1k}^t) \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_{II} = -\frac{r_3}{4} N_k h_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \mathbf{V}_{nk}^t \quad (24)$$

共変基底ベクトル (covariant basis vectors) は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_g^t &= \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial r_g} \\
&= \frac{\partial N_k}{\partial r_g} \mathbf{x}_k^t + \frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k \mathbf{V}_{nk} + \frac{1}{2} \delta_{g3} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_g^{t+\Delta t} &= \frac{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}{\partial r_g} = \frac{\partial (\mathbf{x}^t + \mathbf{u})}{\partial r_g} \\
&= \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial r_g} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_g} \\
&= \mathbf{g}_g^t + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_g}
\end{aligned} \tag{26}$$

$$= \mathbf{g}_g^t + \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g} + \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_g} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g} &= \frac{\partial N_k}{\partial r_g} \mathbf{u}_k + \frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k (-\alpha_k \mathbf{V}_{2k} + \beta_k \mathbf{V}_{1k}) + \frac{1}{2} \delta_{g3} N_k h_k (-\alpha_k \mathbf{V}_{2k} + \beta_k \mathbf{V}_{1k}) \\
&= \frac{\partial N_k}{\partial r_g} \mathbf{u}_k + \left( -\frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k \mathbf{V}_{2k} - \frac{1}{2} \delta_{g3} N_k h_k \mathbf{V}_{2k} \right) \alpha_k + \left( \frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k \mathbf{V}_{1k} + \frac{1}{2} \delta_{g3} N_k h_k \mathbf{V}_{1k} \right) \beta_k
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_g} &= -\frac{r_3}{4} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \mathbf{V}_{nk}^t - \frac{1}{4} \delta_{g3} N_k h_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \mathbf{V}_{nk}^t \\
&= \left( -\frac{r_3}{4} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k \mathbf{V}_{nk}^t - \frac{1}{4} \delta_{g3} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}^t \right) \alpha_k^2 + \left( -\frac{r_3}{4} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k \mathbf{V}_{nk}^t - \frac{1}{4} \delta_{g3} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}^t \right) \beta_k^2
\end{aligned} \tag{29}$$

### 3 Total Lagrange 法

時刻  $t + \Delta t$  における Total Lagrange 法の仮想仕事式は、

$$\int_{V_0} S^{gh_0^{t+\Delta t}} \delta E_{gh_0^{t+\Delta t}} dV_0 = R^{t+\Delta t} \tag{30}$$

$S^{gh_0^{t+\Delta t}}$  は時刻  $t + \Delta t$  における第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルの反変成分、 $E_{gh_0^{t+\Delta t}}$  は Green-Lagrange ひずみテンソルの共変成分、 $R^{t+\Delta t}$  は仮想外力仕事である。

構成則

$$dS^{gh} = C^{gh\mathit{ef}} dE_{\mathit{ef}} \tag{31}$$

が成り立つとする。

増分解を求めるために応力とひずみを既知の  $S^{gh_0^t}$ 、 $E_{gh_0^t}$  と未知の増分  $S^{gh_0}$ 、 $E_{gh_0}$  に分解する。

$$S^{gh_0^{t+\Delta t}} = S^{gh_0^t} + S^{gh_0} \tag{32}$$

$$E_{gh_0^{t+\Delta t}} = E_{gh_0^t} + E_{gh_0} \tag{33}$$

(33) 式より、

$$\begin{aligned}\delta E_{gh_0}^{t+\Delta t} &= \delta(E_{gh_0}^t + E_{gh_0}) \\ &= \delta E_{gh_0}\end{aligned}\quad (34)$$

これらを (30) 式に代入すると、

$$\int_{V_0} (S^{gh_0^t} + S^{gh_0}) \delta E_{gh_0} = R^{t+\Delta t} \quad (35)$$

ひずみの増分  $E_{gh_0}$  を線形項  $E_{gh_0I}$  と非線形項  $E_{gh_0II}$  に分ける。

$$E_{gh_0} = E_{gh_0I} + E_{gh_0II} \quad (36)$$

これを (35) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\int_{V_0} (S^{gh_0^t} + S^{gh_0}) (\delta E_{gh_0I} + \delta E_{gh_0II}) dV_0 &= R^{t+\Delta t} \\ \int_{V_0} S^{gh_0} (\delta E_{gh_0I} + \delta E_{gh_0II}) dV_0 + \int_{V_0} S^{gh_0^t} \delta E_{gh_0II} dV_0 &= R^{t+\Delta t} - \int_{V_0} S^{gh_0^t} \delta E_{gh_0I} dV_0\end{aligned}\quad (37)$$

(37) 式の増分項 (左辺第 1 項) に対して、

$$S^{gh_0} \simeq C^{gh_0} E_{ef_0I} \quad (38)$$

$$(\delta E_{gh_0I} + \delta E_{gh_0II}) \simeq \delta E_{gh_0I} \quad (39)$$

なる線形化を行うと次式を得る。

$$\int_{V_0} C^{gh_0} E_{ef_0I} \delta E_{gh_0I} dV_0 + \int_{V_0} S^{gh_0^t} \delta E_{gh_0II} dV_0 = R^{t+\Delta t} - \int_{V_0} S^{gh_0^t} \delta E_{gh_0I} dV_0 \quad (40)$$

時刻  $t$  の Green-Lagrange ひずみテンソル  $\mathbf{E}$  は、

$$\mathbf{E}_0^t = E_{gh_0}^t \mathbf{G}^g \otimes \mathbf{G}^h \quad (41)$$

$$E_{gh_0}^t = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{g}_h^t - \mathbf{G}_g \cdot \mathbf{G}_h) \quad (42)$$

$$= \frac{1}{2} (g_{gh}^t - G_{gh}) \quad (43)$$

ここに、 $\mathbf{G}_i$ 、 $\mathbf{G}^i$  は時刻 0 における共変ベクトル、反変ベクトルであり、

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_i &= \mathbf{g}_{i0} \\ \mathbf{G}^i &= \mathbf{g}^i_0\end{aligned}\quad (44)$$

また、

$$\begin{aligned}g_{gh} &= \mathbf{g}_g \cdot \mathbf{g}_h \\ G_{gh} &= \mathbf{G}_g \cdot \mathbf{G}_h\end{aligned}\quad (45)$$

反変ベクトル  $\mathbf{G}^i$  は次式より計算する。

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad (46)$$

$$\mathbf{G}^1 = \frac{\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3}{\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3)} \quad (47)$$

$$\mathbf{G}^2 = \frac{\mathbf{G}_3 \times \mathbf{G}_1}{\mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{G}_3 \times \mathbf{G}_1)} \quad (48)$$

$$\mathbf{G}^3 = \frac{\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2}{\mathbf{G}_3 \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2)} \quad (49)$$

時刻  $t + \Delta t$  のひずみは、

$$E_{gh_0}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_g^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{g}_h^{t+\Delta t} - \mathbf{G}_g \cdot \mathbf{G}_h) \quad (50)$$

ひずみの増分は、

$$\begin{aligned} E_{gh_0} &= E_{gh_0}^{t+\Delta t} - E_{gh_0}^t \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_g^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{g}_h^{t+\Delta t} - \mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{g}_h^t) \end{aligned} \quad (51)$$

(26) 式を用いると、

$$\begin{aligned} E_{gh_0} &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \mathbf{g}_g^t + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_g} \right) \cdot \left( \mathbf{g}_h^t + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_h} \right) - \mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{g}_h^t \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_g} \cdot \mathbf{g}_h^t + \mathbf{g}_g^t \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_h} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_g} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_h} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g} + \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_g} \right) \cdot \mathbf{g}_h^t + \mathbf{g}_g^t \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_h} + \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_h} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g} + \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_g} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_h} + \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_h} \right) \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

2次非線形項まで取ると、

$$E_{gh_0} \simeq E_{gh_0I} + E_{gh_0II} \quad (54)$$

$$E_{gh_0I} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g} \cdot \mathbf{g}_h^t + \mathbf{g}_g^t \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_h} \right) \quad (55)$$

$$E_{gh_0II} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_g} \cdot \mathbf{g}_h^t + \mathbf{g}_g^t \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_h} + \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g} \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_h} \right) \quad (56)$$

$E_{gh_0I}$  は線形項、 $E_{gh_0II}$  は非線形 (2次) 項である。

$\frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_g}$  を節点値ベクトル  $\mathbf{U}$  を用いて次のように表す。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g} = \mathbf{a}_{Ig} \mathbf{U} \quad (57)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{1T} & \mathbf{U}^{2T} & \mathbf{U}^{3T} \end{bmatrix}^T \quad (58)$$

$$\mathbf{U}^k = [\mathbf{u}_k \quad \alpha_k \quad \beta_k \quad \theta_{zk}]^T \quad (59)$$

$$\mathbf{u}_k = u_{dk} \mathbf{e}_d \quad (d = x, y, z) \quad (60)$$

$$= [u_{xk} \quad u_{yk} \quad u_{zk}] \quad (61)$$

$$\mathbf{a}_{Ig} = [\mathbf{a}_{Ig}^1 \quad \mathbf{a}_{Ig}^2 \quad \mathbf{a}_{Ig}^3] \quad (62)$$

$$\mathbf{a}_{Ig}^k = [\mathbf{a}_{Ig}^{\mathbf{u}_k} \quad a_{Ig}^{\alpha_k} \quad a_{Ig}^{\beta_k} \quad 0] \quad (63)$$

$$\mathbf{a}_{Ig}^{\mathbf{u}_k} = \frac{\partial N_k}{\partial r_g} \mathbf{e}_d \quad (64)$$

$$a_{Ig}^{\alpha_k} = -\frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k \mathbf{V}_{2k}^t - \frac{1}{2} \delta_{g3} N_k h_k \mathbf{V}_{2k}^t \quad (65)$$

$$a_{Ig}^{\beta_k} = \frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k \mathbf{V}_{1k}^t + \frac{1}{2} \delta_{g3} N_k h_k \mathbf{V}_{1k}^t \quad (66)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_g} = \mathbf{U}^T \mathbf{a}_{IIg} \mathbf{U} \quad (67)$$

$$\mathbf{a}_{IIg} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{IIg}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{IIg}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{IIg}^{33} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\mathbf{a}_{IIg}^{kk} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & a_{IIg}^{\alpha_k \alpha_k} & a_{IIg}^{\beta_k \beta_k} & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$a_{IIg}^{\alpha_k \alpha_k} = -\frac{r_3}{4} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k \mathbf{V}_{nk}^t - \frac{1}{4} \delta_{g3} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}^t \quad (70)$$

$$a_{IIg}^{\beta_k \beta_k} = -\frac{r_3}{4} \frac{\partial N_k}{\partial r_g} h_k \mathbf{V}_{nk}^t - \frac{1}{4} \delta_{g3} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}^t \quad (71)$$

$E_{gh_{0I}}$  を  $\mathbf{U}$  の式で表す。

$$\begin{aligned} E_{gh_{0I}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g} \cdot \mathbf{g}_h^t + \mathbf{g}_g^t \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_h} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\mathbf{a}_{Ig} \mathbf{U}) \cdot \mathbf{g}_h^t + \mathbf{g}_g^t \cdot (\mathbf{a}_{Ih} \mathbf{U}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_h^t \cdot \mathbf{a}_{Ig} + \mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{a}_{Ih}) \mathbf{U} \\ &= \mathbf{B}_{Igh} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\mathbf{B}_{Igh} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_h^t \cdot \mathbf{a}_{Ig} + \mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{a}_{Ih}) \quad (73)$$



$E_{gh0II}$  を  $\mathbf{U}$  の式で表す。

$$\begin{aligned}
E_{gh0II} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_g} \cdot \mathbf{g}_h^t + \mathbf{g}_g^t \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{II}}{\partial r_h} + \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_g} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial r_h} \right) \\
&= \frac{1}{2} \{ (\mathbf{U}^T \mathbf{a}_{IIg} \mathbf{U}) \cdot \mathbf{g}_h^t + \mathbf{g}_g^t \cdot (\mathbf{U}^T \mathbf{a}_{IIh} \mathbf{U}) + (\mathbf{a}_{Ig} \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{a}_{Ih} \mathbf{U}) \} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T (\mathbf{g}_h^t \cdot \mathbf{a}_{IIg} + \mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{a}_{IIh} + \mathbf{a}_{Ig}^T \mathbf{a}_{Ih}) \mathbf{U} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{IIgh} \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\mathbf{B}_{IIgh} = \mathbf{g}_h^t \cdot \mathbf{a}_{IIg} + \mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{a}_{IIh} + \mathbf{a}_{Ig}^T \mathbf{a}_{Ih} \tag{75}$$

ただし、

$$\mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{a}_{IIg} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{a}_{IIg}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{a}_{IIg}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g}_g^t \cdot \mathbf{a}_{IIg}^{33} \end{bmatrix} \tag{76}$$

$$\mathbf{a}_{Ig}^T \mathbf{a}_{Ih} = \begin{bmatrix} a_{Ig1} \\ \vdots \end{bmatrix} [a_{Ih1} \quad \cdots] \tag{77}$$

と計算する。

ひずみの変分を求める。

$$\delta E_{gh0I} = \mathbf{B}_{Igh} \delta \mathbf{U} \tag{78}$$

$$\delta E_{gh0II} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{IIgh} \delta \mathbf{U} \tag{79}$$

$E_{gh0I}$ (72) 式、 $E_{gh0II}$ (74) 式、 $\delta E_{gh0I}$ (78) 式、 $\delta E_{gh0II}$ (79) 式を (37) 式に代入する。

$$\begin{aligned}
&\int_{V_0} C^{ghef} (\mathbf{B}_{Ief} \mathbf{U}) (\mathbf{B}_{Igh} \delta \mathbf{U}) dV_0 + \int_{V_0} S^{gh^t}_0 (\delta \mathbf{U} \mathbf{B}_{IIgh} \mathbf{U}) dV_0 \\
&= R^{t+\Delta t} - \int_{V_0} S^{gh^t}_0 (\mathbf{B}_{Igh} \delta \mathbf{U}) dV_0 \\
&\delta \mathbf{U}^T \int_{V_0} \mathbf{B}_{Igh}^T C^{ghef} \mathbf{B}_{Ief} dV_0 \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T \int_{V_0} S^{gh^t}_0 \mathbf{B}_{IIgh} dV_0 \mathbf{U} \\
&= R^{t+\Delta t} - \delta \mathbf{U} \int_{V_0} \mathbf{B}_{Igh}^T S^{gh^t}_0 dV_0 \\
&\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \delta \mathbf{U} \mathbf{Q} \\
\mathbf{K} \mathbf{U} &= \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{Q}
\end{aligned} \tag{80}$$

$$\mathbf{K} = \int_{V_0} \mathbf{B}_{Igh}^T C^{ghef} \mathbf{B}_{Ief} dV_0 + \int_{V_0} S^{gh^t}_0 \mathbf{B}_{IIgh} dV_0 \tag{81}$$

$$\mathbf{Q} = \int_{V_0} \mathbf{B}_{Igh}^T S^{gh^t}_0 dV_0 \tag{82}$$

剛性方程式 (80) 式の  $\theta_z$  に対応する成分はすべて 0 であるので、 $\theta_z$  に対応する対角成分として次の値を用いる。(fictitious stiffness value)

$$f_p = 10^{-3} \max(K_{ii}^p) \quad (83)$$

$K^p$  は節点  $p$  に関する成分を抽出した小行列ある。

剛性方程式 (80) 式は線形化されているので、時刻  $t$  を既知として  $t + \Delta t$  を求めるとき Newton-Raphson 法などの反復計算は不要である。

(80) 式を解いて得られる  $\mathbf{U}$  は時刻  $t$  から時刻  $t + \Delta t$  の間の増分である。

解の更新は、

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{x}^t + \mathbf{u} \quad (84)$$

$$\mathbf{V}_{nk}^{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{kt}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_{nk}^t \quad (85)$$

$$\mathbf{V}_{1k}^{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{kt}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_{1k}^t \quad (86)$$

$$\mathbf{V}_{2k}^{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{kt}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_{2k}^t \quad (87)$$

で行う。

$t = 0$  から荷重  $\mathbf{F}$  を徐々に増加させ、 $t + \Delta t$  で求めたい荷重になるようにする。

(80) 式はローカル座標系の式なので変換行列  $\mathbf{T}$  を使ってグローバル座標系に変換する。(「Mixed Interpolation of Tensorial Components(MITC) Triangular Elements for Linear Plate Bending」を参照)

## 4 MITC3 要素

MITC(Mixed Interpolation of Tensorial Components) 定式化では、共変面内ひずみ (covariant in-plane strain) 成分は  $E_{ij}$  から直接計算するが、共変横断面せん断ひずみ (covariant transverse shear strain) 場は新たな補間を用いる。

新たなひずみを assumed 共変横せん断ひずみといい、次式で計算する。(導出は「Mixed Interpolation of Tensorial Components(MITC) Triangular Elements for Linear Plate Bending」を参照)

$$\hat{E}_{130}^t = E_{130}^{(1)t} + c_0^t s \quad (88)$$

$$\hat{E}_{230}^t = E_{230}^{(2)t} - c_0^t r \quad (89)$$

$$c_0^t = (E_{130}^{(3)t} - E_{130}^{(1)t}) - (E_{230}^{(3)t} - E_{230}^{(2)t}) \quad (90)$$

$E_{ij}^{(k)}$  は次のサンプリング点 (sampling points or tying points) において  $E_{ij}$  を計算した値である。

$$\begin{aligned} (r, s, t)^{(1)} &= \left( \frac{1}{2}, 0, 0 \right) \\ (r, s, t)^{(2)} &= \left( 0, \frac{1}{2}, 0 \right) \\ (r, s, t)^{(3)} &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (91)$$

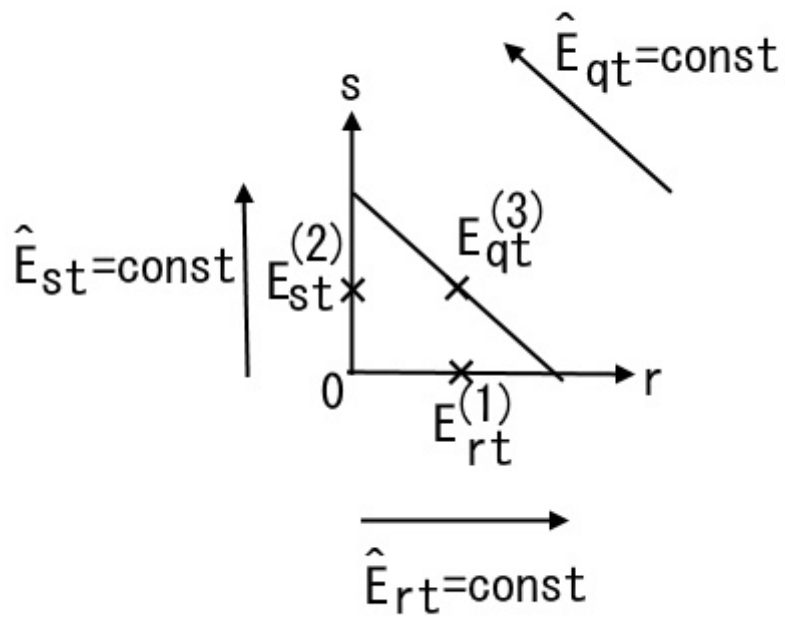


図2 MITC3 要素の assumed 共変横断面せん断ひずみ

$$\hat{E}_{130I} = E_{13\ 0I}^{(1)} + c_I s = \mathbf{B}_{I13}^{(1)} \mathbf{U} + c_I s \quad (92)$$

$$\hat{E}_{230I} = E_{23\ 0I}^{(2)} - c_I r = \mathbf{B}_{I23}^{(2)} \mathbf{U} - c_I r \quad (93)$$

$$\begin{aligned} c_I &= (E_{13\ 0I}^{(3)} - E_{13\ 0I}^{(1)}) - (E_{23\ 0I}^{(3)} - E_{23\ 0I}^{(2)}) \\ &= (\mathbf{B}_{I13}^{(3)} \mathbf{U} - \mathbf{B}_{I13}^{(1)} \mathbf{U}) - (\mathbf{B}_{I23}^{(3)} \mathbf{U} - \mathbf{B}_{I23}^{(2)} \mathbf{U}) \end{aligned} \quad (94)$$

$$\hat{E}_{130II} = E_{13\ 0II}^{(1)} + c_{II} s = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{II13}^{(1)} \mathbf{U} + c_{II} s \quad (95)$$

$$\hat{E}_{230II} = E_{23\ 0II}^{(2)} - c_{II} r = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{II23}^{(2)} \mathbf{U} - c_{II} r \quad (96)$$

$$\begin{aligned} c_{II} &= (E_{13\ 0II}^{(3)} - E_{13\ 0II}^{(1)}) - (E_{23\ 0II}^{(3)} - E_{23\ 0II}^{(2)}) \\ &= \left( \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{II13}^{(3)} \mathbf{U} - \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{II13}^{(1)} \mathbf{U} \right) - \left( \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{II23}^{(3)} \mathbf{U} - \frac{1}{2} \mathbf{B}_{II23}^{(2)} \mathbf{U} \right) \end{aligned} \quad (97)$$

$E_{gh0I}$ (72) 式の rt、st 成分を (92)、(93) 式に置き換え、 $E_{gh0II}$ (74) 式の rt、st 成分を (95)、(96) 式に置き換えると、

$$\hat{E}_{gh0I} = \hat{\mathbf{B}}_{Igh} \mathbf{U} \quad (98)$$

$$\hat{E}_{gh0II} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{B}}_{IIgh} \mathbf{U} \quad (99)$$

となる。

したがって (80)～(82) 式は次のように置き換わる。

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \hat{\mathbf{Q}} \quad (100)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \int_{V_0} \hat{\mathbf{B}}_{Igh}^T C^{ghef} \hat{\mathbf{B}}_{Ief} dV_0 + \int_{V_0} \hat{S}^{gh^t} \hat{\mathbf{B}}_{IIgh} dV_0 \quad (101)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \int_{V_0} \hat{\mathbf{B}}_{Igh}^T \hat{S}^{gh^t} dV_0 \quad (102)$$

ここに、 $\hat{S}^{gh^t}$  は assumed ひずみ  $\hat{\mathbf{E}}_0^t$  を用いて算出した応力である。

## 5 St.Venant-Kirchhoff モデル

幾何学的非線形モデルの例として St.Venant-Kirchhoff モデルを用いることにする。

St.Venant-Kirchhoff モデルの第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル  $\mathbf{S}$  は、

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (103)$$

$\mathbf{E}$  は Green-Lagrange ひずみテンソルである。  $\lambda$ 、  $\mu$  は Lamé の定数である。

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{E}) &= \text{tr}(E_i^j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_j) \\
&= E_i^j \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j \\
&= E_i^j \delta_j^i \\
&= E_i^i \\
&= \mathbf{G}^p \cdot (E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \cdot \mathbf{G}_p \\
&= E_{ij} (\mathbf{G}^p \cdot \mathbf{G}^i) (\mathbf{G}^j \cdot \mathbf{G}_p) \\
&= E_{ij} G^{pi} \delta_p^j \\
&= E_{ij} G^{ij}
\end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned}
S_{gh} &= \mathbf{G}^g \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{G}^h \\
&= \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{G}^g \cdot \mathbf{G}^h + 2\mu \mathbf{G}^g \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}^h \\
&\quad ((104) \text{ 式を用いた}) \\
&= \lambda (E_{ij} G^{ij}) G^{gh} + 2\mu \mathbf{G}^g \cdot (E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \cdot \mathbf{G}^h \\
&= \lambda (E_{ij} G^{ij}) G^{gh} + 2\mu (E_{ij} G^{gi} G^{jh}) \\
&= C^{ghij} E_{ij}
\end{aligned} \tag{105}$$

$$C^{ghij} = \lambda G^{ij} G^{gh} + 2\mu G^{ig} G^{jh} \tag{106}$$

## 6 運動エネルギーと質量マトリクス (動的解析)

(23)、(24) 式の変位  $\mathbf{u}_I$ 、  $\mathbf{u}_{II}$  は次のように書ける。

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{b}_I \mathbf{U} \tag{107}$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}^{1T} \quad \mathbf{U}^{2T} \quad \mathbf{U}^{3T}]^T \tag{108}$$

$$\mathbf{U}^k = [\mathbf{u}_k \quad \alpha_k \quad \beta_k \quad \theta_{zk}] \tag{109}$$

$$\mathbf{b}_I = [\mathbf{b}_I^1 \quad \mathbf{b}_I^2 \quad \mathbf{b}_I^3] \tag{110}$$

$$\mathbf{b}_I^k = [\mathbf{b}_I^{\mathbf{u}_k} \quad b_I^{\alpha_k} \quad b_I^{\beta_k} \quad 0] \tag{111}$$

$$= \begin{bmatrix} (b_I^{\mathbf{u}_k})_x & (b_I^{\alpha_k})_x & (b_I^{\beta_k})_x \\ (b_I^{\mathbf{u}_k})_y & (b_I^{\alpha_k})_y & (b_I^{\beta_k})_y \\ (b_I^{\mathbf{u}_k})_z & (b_I^{\alpha_k})_z & (b_I^{\beta_k})_z \end{bmatrix} \tag{112}$$

$$\mathbf{b}_I^{\mathbf{u}_k} = N_k \mathbf{e}_d \quad (d = x, y, z) \tag{113}$$

$$b_I^{\alpha_k} = -\frac{r_3}{2} N_k h_k \mathbf{V}_{2k}^t \tag{114}$$

$$b_I^{\beta_k} = \frac{r_3}{2} N_k h_k \mathbf{V}_{1k}^t \tag{115}$$

$$\mathbf{u}_{II} = \mathbf{U}^T \mathbf{b}_{II} \mathbf{U} \quad (116)$$

$$\mathbf{b}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{II}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_{II}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_{II}^{33} \end{bmatrix} \quad (117)$$

$$\mathbf{b}_{II}^{kk} = [\mathbf{0} \quad b_{II}^{\alpha_k \alpha_k} \quad b_{II}^{\beta_k \beta_k} \quad 0] \quad (118)$$

$$b_{II}^{\alpha_k \alpha_k} = -\frac{r_3}{4} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}^t \quad (119)$$

$$b_{II}^{\beta_k \beta_k} = -\frac{r_3}{4} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}^t \quad (120)$$

運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho (\dot{\mathbf{u}}_I + \dot{\mathbf{u}}_{II}) \cdot (\dot{\mathbf{u}}_I + \dot{\mathbf{u}}_{II}) dV_0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_0} (\dot{\mathbf{u}}_I \cdot \dot{\mathbf{u}}_I + \dot{\mathbf{u}}_I \cdot \dot{\mathbf{u}}_{II} + \dot{\mathbf{u}}_{II} \cdot \dot{\mathbf{u}}_I + \dot{\mathbf{u}}_{II} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{II}) dV_0 \end{aligned} \quad (121)$$

$\dot{\mathbf{u}}_{II}$  が無視できるとすると線形となり、

$$\begin{aligned} T &\simeq \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho \dot{\mathbf{u}}_I \cdot \dot{\mathbf{u}}_I dV_0 \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \int_{V_0} \rho \mathbf{b}_I^T \mathbf{b}_I dV_0 \dot{\mathbf{U}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (122)$$

$$\mathbf{M} = \int_{V_0} \rho \mathbf{b}_I^T \mathbf{b}_I dV_0 \quad (123)$$

$\mathbf{M}$  は質量マトリクスである。

Hamilton の原理より運動方程式は、

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \hat{\mathbf{Q}} \quad (124)$$

## 7 まとめ

幾何学的非線形、特に有限回転を考慮した Total Lagrange 法による MITC3 シェル要素の定式化を行った。幾何学的非線形モデルの例として St.Venant-Kirchhoff モデルを用いた。

## 8 参考文献

[1] Hyungmin Juna, Kyungho Yoon, Phill-Seung Lee and Klaus-Jürgen Bathe, "The MITC3+ shell el-

ement enriched in membrane displacements by interpolation covers”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 337 (2018) pp.458–480, April 2018

[2] Eduardo N. Dvorkin, ”Nonlinear Analysis of Shells Using the MITC Formulation”, *Archives of Computational Methods in Engineering, State of the art reviews*, Vol. 2, 2, 1-50, 1995

[3] Eduardo N. Dvorkin and Klaus-Jürgen Bathe, ”A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis”, *Eng. Comput.*, Vol. 1, pp.77–88, March 1984