

# Mixed Interpolation of Tensorial Components(MITC) Triangular Elements for Linear Plate Bending

ryujimiya

2020年05月26日

## 1 はじめに

板・シェル要素に用いられる Mixed Interpolation of Tensorial Components(MITC) 定式化は、degenerated シェル要素において面外せん断ひずみに関して assumed strain と呼ばれる補間を行ったもので、shear locking を回避することができる。

本書では MITC3 要素 (3 節点三角形要素) を扱い、ひずみは線形とする。

## 2 degenerated シェル要素

中立面 (mid-surface) の節点座標はグローバル直角座標  $x_i$ 、基底  $e_i$ 、( $i = 1, 2, 3$ ) すなわち ( $i = x, y, z$ ) によって表される。

ディレクターベクトル (director vectors)  $\mathbf{V}_{ni}$  が中立面の節点上に定義される。

シェルの局所座標を  $r_i$  ( $r_1 = r$ ,  $r_2 = s$ ,  $r_3 = t$ ) とする。

面積座標を  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とすると中立面の局所座標  $r_1$ 、 $r_2$  は、

$$r_1 = L_2$$

$$r_2 = L_3$$

中立面の補間関数  $N_i$  は、

$$N_1 = 1 - L_2 - L_3 = 1 - r_1 - r_2 \quad (1)$$

$$N_2 = L_2 = r_1 \quad (2)$$

$$N_3 = L_3 = r_2 \quad (3)$$

ディレクターベクトルは、

$$\mathbf{V}_{nk} = \frac{\mathbf{x}_{\text{top } k} - \mathbf{x}_{\text{bottom } k}}{|\mathbf{x}_{\text{top } k} - \mathbf{x}_{\text{bottom } k}|} = \frac{\mathbf{x}_{\text{top } k} - \mathbf{x}_{\text{bottom } k}}{h_k} \quad (4)$$

$h_k$  は板の厚さである。また、 $|\mathbf{V}_{nk}| = 1$

シェル内部の位置ベクトルは、

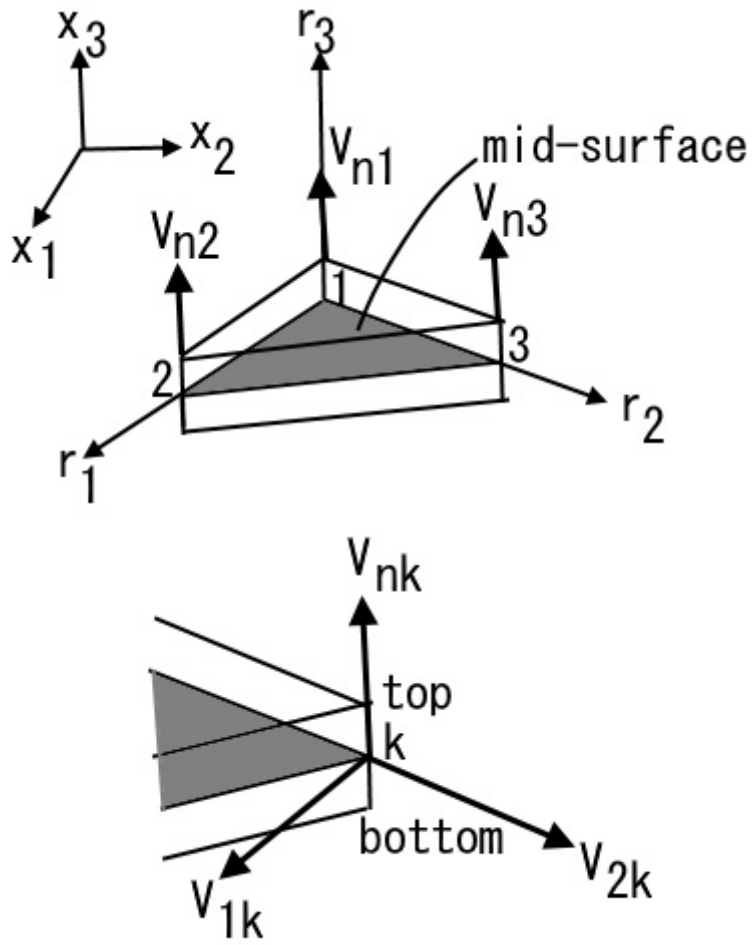


図1 degenerated シェル要素

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(r_1, r_2, r_3) &= \frac{1}{2}(1 + r_3)N_k \mathbf{x}_{\text{top } k} + \frac{1}{2}(1 - r_3)N_k \mathbf{x}_{\text{bottom } k} \\
 &= \frac{1}{2}N_k(\mathbf{x}_{\text{top } k} + \mathbf{x}_{\text{bottom } k}) + \frac{1}{2}r_3 N_k(\mathbf{x}_{\text{top } k} - \mathbf{x}_{\text{bottom } k}) \\
 &= N_k \mathbf{x}_k + \frac{r_3}{2}N_k h_k \mathbf{V}_{nk}
 \end{aligned} \tag{5}$$

変形に関する次の2つの仮定を行う。

- (a) ディレクターベクトルは変形後も直線となるとする。
- (b) 厚さは変形前後で一定であるとする。

ディレクターに垂直なベクトル  $\mathbf{V}_{1k}$ 、 $\mathbf{V}_{2k}$  を定義する。

$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_{nk} \neq 0$  のとき、

$$\mathbf{V}_{1k} = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_{nk}}{|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_{nk}|} \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_{2k} = \mathbf{V}_{nk} \times \mathbf{V}_{1k} \quad (7)$$

$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{V}_{nk} = 0$  のとき、

$$\mathbf{V}_{1k} = \mathbf{e}_3 \quad (8)$$

$$\mathbf{V}_{2k} = \mathbf{e}_1 \quad (9)$$

変位を求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x}^{t+\Delta t} - \mathbf{x}^t \\ &= N_k \mathbf{x}_k^{t+\Delta t} + \frac{r_3}{2} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}^{t+\Delta t} - \left( N_k \mathbf{x}_k^t + \frac{r_3}{2} N_k h_k \mathbf{V}_{nk}^t \right) \\ &= N_k (\mathbf{x}_k^{t+\Delta t} - \mathbf{x}_k^t) + \frac{r_3}{2} N_k h_k (\mathbf{V}_{nk}^{t+\Delta t} - \mathbf{V}_{nk}^t) \\ &= N_k \mathbf{u}_k + \frac{r_3}{2} N_k h_k (-\mathbf{V}_{2k}^t \alpha_k + \mathbf{V}_{1k}^t \beta_k) \end{aligned} \quad (10)$$

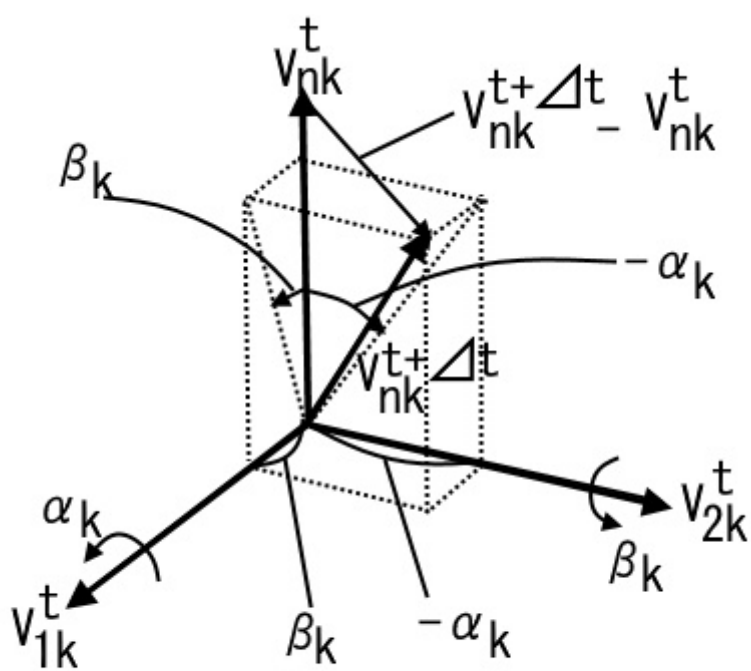


図2 ディレクターの回転

共変ひずみ成分 (covariant strain components) の線形項は、

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i}) \quad (11)$$

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i} \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \quad (13)$$

$i, j$  は  $r_1, r_2, r_3$  すなわち  $r, s, t$  に対応する。

$\mathbf{g}_i$  は共変基底ベクトル (covariant basis vectors) であり、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} \left( N_k \mathbf{x}_k + \frac{r_3}{2} N_k h_k \mathbf{V}_{nk} \right) \\ &= \frac{\partial N_k}{\partial r_i} \mathbf{x}_k + \frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_i} h_k \mathbf{V}_{nk} + \frac{1}{2} \delta_{i3} N_k h_k \mathbf{V}_{nk} \end{aligned} \quad (14)$$

$\mathbf{u}_{,i}$  は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,i} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \\ &= \frac{\partial N_k}{\partial r_i} \mathbf{u}_k + \frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_i} h_k (-\mathbf{V}_{2k} \alpha_k + \mathbf{V}_{1k} \beta_k) + \frac{1}{2} \delta_{i3} N_k h_k (-\mathbf{V}_{2k} \alpha_k + \mathbf{V}_{1k} \beta_k) \\ &= \frac{\partial N_k}{\partial r_i} \mathbf{u}_k + \left( -\frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_i} h_k \mathbf{V}_{2k} - \frac{1}{2} \delta_{i3} N_k h_k \mathbf{V}_{2k} \right) \alpha_k + \left( \frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_i} h_k \mathbf{V}_{1k} + \frac{1}{2} \delta_{i3} N_k h_k \mathbf{V}_{1k} \right) \beta_k \end{aligned} \quad (15)$$

形状関数の微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial r_1} &= \frac{\partial}{\partial r_1}(1 - r_1 - r_2) = -1 \\
\frac{\partial N_1}{\partial r_2} &= \frac{\partial}{\partial r_2}(1 - r_1 - r_2) = -1 \\
\frac{\partial N_1}{\partial r_3} &= 0 \\
\frac{\partial N_2}{\partial r_1} &= \frac{\partial}{\partial r_1}(r_1) = 1 \\
\frac{\partial N_2}{\partial r_2} &= \frac{\partial}{\partial r_1}(r_2) = 0 \\
\frac{\partial N_2}{\partial r_3} &= 0 \\
\frac{\partial N_3}{\partial r_1} &= \frac{\partial}{\partial r_2}(r_1) = 0 \\
\frac{\partial N_3}{\partial r_2} &= \frac{\partial}{\partial r_2}(r_2) = 1 \\
\frac{\partial N_3}{\partial r_3} &= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

$\mathbf{u}_{,i}$  を節点値ベクトル  $\mathbf{U}$  を用いて次のように表す。

$$\mathbf{u}_{,i} = \mathbf{a}_i \mathbf{U} \tag{17}$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}^{1T} \quad \mathbf{U}^{2T} \quad \mathbf{U}^{3T}]^T \tag{18}$$

$$\mathbf{U}^k = [\mathbf{u}_k \quad \alpha_k \quad \beta_k \quad \theta_{zk}]^T \tag{19}$$

$$\mathbf{u}_k = u_{dk} \mathbf{e}_d \quad (d = x, y, z) \tag{20}$$

$$= [u_{xk} \quad u_{yk} \quad u_{zk}] \tag{21}$$

$$\mathbf{a}_i = [\mathbf{a}_i^1 \quad \mathbf{a}_i^2 \quad \mathbf{a}_i^3] \tag{22}$$

$$\mathbf{a}_i^k = [\mathbf{a}_i^{\mathbf{u}_k} \quad a_i^{\alpha_k} \quad a_i^{\beta_k} \quad 0] \tag{23}$$

$$\mathbf{a}_i^{\mathbf{u}_k} = \frac{\partial N_k}{\partial r_i} \mathbf{e}_d \tag{24}$$

$$a_i^{\alpha_k} = -\frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_i} h_k \mathbf{V}_{2k} - \frac{1}{2} \delta_{i3} N_k h_k \mathbf{V}_{2k} \tag{25}$$

$$a_i^{\beta_k} = \frac{r_3}{2} \frac{\partial N_k}{\partial r_i} h_k \mathbf{V}_{1k} + \frac{1}{2} \delta_{i3} N_k h_k \mathbf{V}_{1k} \tag{26}$$

(14) 式、(17) 式を (11) に代入すると、

$$\begin{aligned}
e_{mn} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{u}_{,n} + \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{u}_{,m}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{a}_n \mathbf{U} + \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{a}_m \mathbf{U}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{a}_n + \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{a}_m) \mathbf{U} \\
&= \mathbf{b}_{mn} \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\mathbf{b}_{mn} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{a}_n + \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{a}_m) \tag{28}$$

ローカル座標系の基底ベクトル  $\mathbf{l}_i$  を定義する。

$$\mathbf{l}_3 = \frac{\mathbf{g}_3}{|\mathbf{g}_3|} \tag{29}$$

$$\mathbf{l}_1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{l}_3}{|\mathbf{g}_2 \times \mathbf{l}_3|} \tag{30}$$

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1 \tag{31}$$

反変基底ベクトル (contravariant basis vectors)  $\mathbf{g}^j$  は次式で定義される。

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \tag{32}$$

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)} \tag{33}$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{\mathbf{g}_2 \cdot (\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1)} \tag{34}$$

$$\mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_3 \cdot (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)} \tag{35}$$

ひずみの共変成分をローカル座標系  $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$  の成分に変換する。

$$\mathbf{e} = e_{mn}(\mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^n) = \epsilon_{ij}(\mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_j) \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ij} &= \mathbf{l}_i \mathbf{e} \mathbf{l}_j \\
&= e_{mn}(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{g}^m)(\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{g}^n) \\
&= \mathbf{b}_{mn} \mathbf{U}(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{g}^m)(\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{g}^n) \\
&= \mathbf{B}_{ij} \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\mathbf{B}_{ij} = (\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{g}^m)(\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{g}^n) \mathbf{b}_{mn} \tag{38}$$

ひずみテンソルをベクトル表記する。

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad 2\epsilon_{12} \quad 2\epsilon_{13} \quad 2\epsilon_{23}]^T \tag{39}$$

とすると、

$$\epsilon = BU \quad (40)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ 2B_{12} \\ 2B_{13} \\ 2B_{23} \end{bmatrix} \quad (41)$$

### 3 MITC3 要素

MITC(Mixed Interpolation of Tensorial Components) 定式化では、共変面内ひずみ (covariant in-plane strain) 成分は  $e_{ij}$  から直接計算するが、共変横断面せん断ひずみ (covariant transverse shear strain) 場は新たな補間を用いる。

三角形要素の辺に沿って共変横断面せん断ひずみ成分は一定であると仮定すると、次の”assumed covariant transverse shear strain”  $\hat{e}_{rt}, \hat{e}_{st}$  の補間関数が得られる。

$$\hat{e}_{rt} = e_{rt}^{(1)} + cs \quad (42)$$

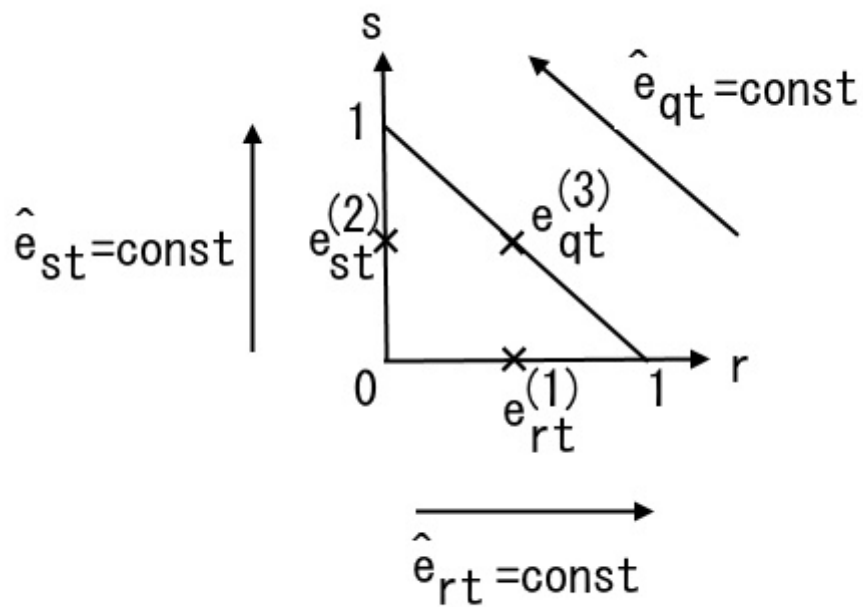
$$\hat{e}_{st} = e_{st}^{(2)} - cr \quad (43)$$

$$c = (e_{rt}^{(3)} - e_{rt}^{(1)}) - (e_{st}^{(3)} - e_{st}^{(2)}) \quad (44)$$

$e_{ij}^{(k)}$  は次のサンプリング点 (sampling points or tying points) において  $e_{ij}$  を計算した値である。

$$\begin{aligned} (r, s, t)^{(1)} &= \left( \frac{1}{2}, 0, 0 \right) \\ (r, s, t)^{(2)} &= \left( 0, \frac{1}{2}, 0 \right) \\ (r, s, t)^{(3)} &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (45)$$





× : sampling points

図3 MITC3 要素の assumed 共変横断面せん断ひずみ

上式の導出の概要は次の通り:  
次のように 1 次多項式で表す。

$$\begin{aligned}\hat{e}_{rt} &= a_1 + b_1 r + c_1 s \\ \hat{e}_{st} &= a_2 + b_2 r + c_2 s \\ \hat{e}_{qt} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_{st} - \hat{e}_{rt})\end{aligned}\quad (46)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\hat{e}_{rt}(0, 0) &= e_{rt}^{(1)} & \hat{e}_{rt}(1, 0) &= e_{rt}^{(1)} \\ \hat{e}_{st}(0, 0) &= e_{st}^{(2)} & \hat{e}_{st}(0, 1) &= e_{st}^{(2)} \\ \hat{e}_{qt}(1, 0) &= e_{qt}^{(3)} & \hat{e}_{qt}(0, 1) &= e_{qt}^{(3)} \\ \hat{e}_{qt}^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{st}^{(3)} - e_{rt}^{(3)})\end{aligned}\quad (47)$$

の条件を課すと多項式の係数が求められる。

assumed 共変横断面せん断ひずみ成分を節点値ベクトルを用いて表す。

$$\hat{e}_{rt} = \mathbf{b}_{13}^{(1)} \mathbf{U} + cs \quad (48)$$

$$\hat{e}_{st} = \mathbf{b}_{23}^{(2)} \mathbf{U} - cr \quad (49)$$

$$c = (\mathbf{b}_{13}^{(3)} \mathbf{U} - \mathbf{b}_{13}^{(1)} \mathbf{U}) - (\mathbf{b}_{23}^{(3)} \mathbf{U} - \mathbf{b}_{23}^{(2)} \mathbf{U}) \quad (50)$$

(11) 式、すなわち (27) 式の  $e_{mn}$  の  $e_{rt}, e_{st}$  の成分を上式 (48) 式、(49) 式で置き換えると、

$$\hat{e}_{mn} = \hat{\mathbf{b}}_{mn} \mathbf{U} \quad (51)$$

となる。

これをローカル直角座標系  $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$  に変換すると、

$$\hat{e}_{ij} = \hat{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{U} \quad (52)$$

これをベクトル表記すると、

$$\hat{\mathbf{e}} = [\hat{\epsilon}_{11} \quad \hat{\epsilon}_{22} \quad 2\hat{\epsilon}_{12} \quad 2\hat{\epsilon}_{13} \quad 2\hat{\epsilon}_{23}] \quad (53)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{U} \quad (54)$$

面内ひずみと断面せん断ひずみに分離して表記すると、

$$\hat{\mathbf{e}}_b = \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_{11} \\ \hat{\epsilon}_{22} \\ 2\hat{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{B}}_b \mathbf{U} \quad (55)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} 2\hat{\epsilon}_{13} \\ 2\hat{\epsilon}_{23} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{B}}_s \mathbf{U} \quad (56)$$

平面応力場 ( $\sigma_z = 0$ ) の場合の構成則は、

$$\hat{\sigma}_b = C_b \hat{\epsilon}_b \quad (57)$$

$$\hat{\tau}_s = k C_s \hat{\gamma} \quad (58)$$

$$C_b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$C_s = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (60)$$

$E$  は Young 率、 $\nu$  は Poisson 比である。 $k$  はせん断補正係数であるが、文献によれば  $k = 1$  でよい。

## 4 ひずみエネルギーと剛性マトリクス

共変横断面せん断ひずみを再定義したひずみや応力を用いるとひずみエネルギーは、

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \hat{\sigma}_b^T \hat{\epsilon}_b dz dA + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \hat{\tau}_s^T \hat{\gamma} dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \hat{\epsilon}_b^T C_b \hat{\epsilon}_b dz dA + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A k \hat{\gamma}^T C_s \hat{\gamma} dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{B}}_b^T C_b \hat{\mathbf{B}}_b \mathbf{U} dz dA + \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \mathbf{U}^T k \hat{\mathbf{B}}_s^T C_s \hat{\mathbf{B}}_s \mathbf{U} dz dA \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \hat{\mathbf{B}}_b^T C_b \hat{\mathbf{B}}_b + k \hat{\mathbf{B}}_s^T C_s \hat{\mathbf{B}}_s dz dA \quad (62)$$

$\mathbf{K}$  は剛性マトリクスである。

$dA$  は  $r_1, r_2$ 、 $dz$  は  $r_3$  に関する積分を行う。

上式の定式化で  $\theta_z$  に対応する成分はすべて 0 であるので、 $\theta_z$  に対応する対角成分として次の値を用いる。  
(fictitious stiffness value)

$$f_p = 10^{-3} \max(K_{ii}^p) \quad (63)$$

$K^p$  は節点  $p$  に関する成分を抽出した小行列ある。

## 5 グローバル座標への変換

$\mathbf{u}_k$  はグローバル座標系の成分なので変換は必要ない。

$\alpha_k$ 、 $\beta_k$  はローカルの回転角なのでグローバル座標系に変換する。

$$\mathbf{U}_l = \mathbf{T}\mathbf{U}_g \quad (64)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$l_1 = \cos(\mathbf{V}_{1k}, x), \quad m_1 = \cos(\mathbf{V}_{1k}, y), \quad n_1 = \cos(\mathbf{V}_{1k}, z) \quad (66)$$

$$l_2 = \cos(\mathbf{V}_{2k}, x), \quad m_2 = \cos(\mathbf{V}_{2k}, y), \quad n_2 = \cos(\mathbf{V}_{2k}, z) \quad (67)$$

$$l_3 = \cos(\mathbf{V}_{nk}, x), \quad m_3 = \cos(\mathbf{V}_{nk}, y), \quad n_3 = \cos(\mathbf{V}_{nk}, z) \quad (68)$$

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b \quad (69)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}_{1k})_x & (\mathbf{V}_{1k})_y & (\mathbf{V}_{1k})_z \\ (\mathbf{V}_{2k})_x & (\mathbf{V}_{2k})_y & (\mathbf{V}_{2k})_z \\ (\mathbf{V}_{nk})_x & (\mathbf{V}_{nk})_y & (\mathbf{V}_{nk})_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1k}^T \\ \mathbf{V}_{2k}^T \\ \mathbf{V}_{nk}^T \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_p & & \\ & \mathbf{T}_p & \\ & & \mathbf{T}_p \end{bmatrix} \quad (72)$$

変換マトリクス  $\mathbf{T}$  を用いるとグローバル剛性マトリクスは、

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_l \mathbf{T} \quad (73)$$

であり、剛性方程式は、

$$\mathbf{K}_g \mathbf{U} = \mathbf{F}_g \quad (74)$$

## 6 運動エネルギーと質量マトリクス (動的解析)

(10) 式の変位  $\mathbf{u}$  は次のように書ける。

$$\mathbf{u} = \mathbf{b}\mathbf{U} \quad (75)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}^{1T} \quad \mathbf{U}^{2T} \quad \mathbf{U}^{3T}]^T \quad (76)$$

$$\mathbf{U}^k = [\mathbf{u}_k \quad \alpha_k \quad \beta_k \quad \theta_{zk}] \quad (77)$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}^1 \quad \mathbf{b}^2 \quad \mathbf{b}^3] \quad (78)$$

$$\mathbf{b}^k = [\mathbf{b}^{\mathbf{u}_k} \quad b^{\alpha_k} \quad b^{\beta_k} \quad 0] \quad (79)$$

$$\mathbf{b}^{\mathbf{u}_k} = N_k \mathbf{e}_d \quad (d = x, y, z) \quad (80)$$

$$b^{\alpha_k} = -\frac{r_3}{2} N_k h_k \mathbf{V}_{2k} \quad (81)$$

$$b^{\beta_k} = \frac{r_3}{2} N_k h_k \mathbf{V}_{1k} \quad (82)$$

また、

$$\mathbf{b}^k = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}^{\mathbf{u}_k})_x & (b^{\alpha_k})_x & (b^{\beta_k})_x \\ (\mathbf{b}^{\mathbf{u}_k})_y & (b^{\alpha_k})_y & (b^{\beta_k})_y \\ (\mathbf{b}^{\mathbf{u}_k})_z & (b^{\alpha_k})_z & (b^{\beta_k})_z \end{bmatrix} \quad (83)$$

である。

運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \int_V \rho \mathbf{b}^T \mathbf{b} dV \dot{\mathbf{U}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (84)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{b}^T \mathbf{b} dV \quad (85)$$

$\mathbf{M}$  は質量マトリクスである。

グローバル座標系へ変換すると、

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_l \mathbf{T} \quad (86)$$

Hamilton の原理より運動方程式は、

$$\mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_g \mathbf{U} = \mathbf{F}_g \quad (87)$$

## 7 まとめ

板の曲げを解析するために Mixed Interpolation of Tensorial Components(MITC) の定式化を行った。  
本書で用いた要素は三角形要素 (MITC3 要素) で、線形ひずみを仮定した。

## 8 参考文献

- [1] Youngyu Lee, Kyungho Yoon, Phill-Seung Lee, "Improving the MITC3 shell finite element by using the Hellinger-Reissner principle", Computers and Structures 110–111, pp.93–106, 2012
- [2] Phill-Seung Lee, Klaus-Jürgen Bathe, "Development of MITC isotropic triangular shell finite elements", Computers and Structures 82, pp.945–962, 2004
- [3] Eduardo N. Dvorkin and Klaus-Jürgen Bathe, "A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis", Eng. Comput, Vol. 1, pp.77–88, March, 1984
- [4] Klaus-Jürgen Bathe and Eduardo N. Dvorkin, "A formulation of general shell elements — the use of mixed interpolation of tensorial components", International Journal For Numerical Methods In Engi-

neering, vol. 22,pp.697-722, 1986