Higher Order Both Evanescent And Traveling Wave Absorbing Boundary Conditions (ABC) for Time Domain FEM

ryujimiya

2019 年 10 月 27 日

1　はじめに

時間領域有限要素法 (TDFEM) に適用可能な高次の吸収境界条件 (ABC) としては、Givoli-Neta-Patlashenko の高次境界条件がある。彼らの高次 ABC は伝搬波のみを扱っており、エバネセント波は吸収できない。また、境界上は同じ媒質であるとして定式化している。ここではエバネセント波も扱えるようにし、境界上に複数の媒質がある場合（例えば誘電体スラブ導波路）にも適用できるように定式化する。

2　高次 ABC

媒質も考慮した境界上の線要素内支配方程式は、

$$p\nabla^2 u - \frac{1}{c_0^2} q\ddot{u} = 0$$

or

$$p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2} q\ddot{u} = 0 \tag{1}$$

$f(x-ct)$、e^{-ax} の形の波、すなわち伝搬波、エバネセント波の両方がある波の ABC は、

$$\prod_{j1=1}^{J1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_{j1}\right)\prod_{j2=1}^{J2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_{j2}}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{2}$$

これを次のように分解する。

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_1\right)\phi_0^{(1)} = \phi_1^{(1)} \\
\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_2\right)\phi_1^{(1)} = \phi_2^{(1)} \\
\vdots \\
\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_{J1}\right)\phi_{J1-1}^{(1)} = \phi_1^{(J1)}
\end{gathered} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c_1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_0^{(2)} &= \phi_1^{(2)} \\
\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c_2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_1^{(2)} &= \phi_2^{(2)} \\
&\vdots \\
\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c_{J2}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_{J2-1}^{(2)} &= \phi_{J2}^{(2)}
\end{aligned} \tag{4}
$$

$J_1 > 0$ のとき

$$
\phi_0^{(1)} = u \tag{5}
$$

$J_1 > 0$ のとき、$J_2 > 0$ ならば

$$
\begin{aligned}
\phi_0^{(2)} &= \phi_{J1}^{(1)} \\
\phi_{J2}^{(2)} &= 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

$J_2 = 0$ ならば

$$
\phi_{J1}^{(1)} = 0 \tag{7}
$$

$J_1 = 0$ のとき、$J_2 > 0$ ならば

$$
\begin{aligned}
\phi_0^{(2)} &= u \\
\phi_{J2}^{(2)} &= 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

(3) 式および (4) 式は、

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x}+a_j\right)\phi_{j-1}^{(1)} = \phi_j^{(1)} \qquad (j = 1, \cdots, J_1) \tag{9}
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c_j}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_{j-1}^{(2)} = \phi_j^{(1)} \qquad (j = 1, \cdots, J_2) \tag{10}
$$

また、$\phi_j^{(1)}$、$\phi_j^{(2)}$ は (1) を満たすので、

$$
p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}-\frac{1}{c_0^2}q\ddot{\phi}_j = 0 \tag{11}
$$

求めるべき変数は、$J_1 > 0$、$J_2 > 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\phi_0^{(1)} &= u \\
&\phi_1^{(1)} \\
&\vdots \\
&\phi_{J1-1}^{(1)} \\
\phi_{J1}^{(1)} &= \phi_0^{(2)} \\
&\phi_1^{(2)} \\
&\vdots \\
&\phi_{J2-1}^{(2)}
\end{aligned}
$$

$J_1 > 0$、$J_2 = 0$ のとき、

$$\begin{gathered}\phi_0^{(1)} = u \\ \phi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_{J1-1}^{(1)} \\ \phi_{J1}^{(1)} = 0\end{gathered}$$

$J_1 = 0$、$J_2 > 0$ のとき、

$$\begin{gathered}\phi_0^{(2)} = u \\ \phi_1^{(2)} \\ \vdots \\ \phi_{J2-1}^{(2)}\end{gathered}$$

3　マトリクス

弱形式で使用するマトリクスを定義しておく。

$$[M]_{ij} = \epsilon_0 \mu_0 \iint_\Omega q N_i N_j d\Omega \tag{12}$$

$$[K]_{ij} = \iint_\Omega p \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + p \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \tag{13}$$

$$[Qb]_{ij} = \int_B p N_i N_j dB \tag{14}$$

$$[Rb]_{ij} = \int_B p \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} dB \tag{15}$$

$$[Tb]_{ij} = \int_B q N_i N_j dB \tag{16}$$

4　弱形式 $\underline{\phi_0^{(1)} = u}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_1\right) u = \phi_1^{(1)} \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \phi_1^{(1)} - a_1 u \tag{18}$$

u の試行関数を w とすると (1) 式の弱形式は、

$$\iint_\Omega w \left(p \nabla^2 u - \frac{1}{c_0^2} q \ddot{u}\right) d\Omega = 0 \tag{19}$$

$$\iint_\Omega \frac{1}{c_0^2} q \ddot{u} + p \nabla w \cdot \nabla u d\Omega - \int_B p w \frac{\partial u}{\partial x} dB = 0 \tag{20}$$

(18) 式を (20) 式に代入すると

$$\iint_\Omega w \frac{1}{c_0^2} q \ddot{u} + p \nabla w \cdot \nabla u d\Omega - \int_B p w \left(\phi_1^{(1)} - a_1 u\right) dB = 0 \tag{21}$$

したがって、

$$[M]\ddot{u} + \tilde{\beta}_0[Qb]u + [K]u = [Qb]\phi_1^{(1)} \tag{22}$$
$$\tilde{\beta}_0 = a_1$$

5　弱形式 $\underline{\phi_1^{(1)} \cdots \phi_{J1-1}^{(1)}}$

(11) 式

$$p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2}q\ddot{\phi}_j = 0$$

ここで、

$$p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2} = p\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{j+1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_{j+1}\right)\phi_j + pa_{j+1}^2\phi_j \tag{23}$$

を代入し、j → j-1 とおくと、

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_j\right)\underline{\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_j\right)\phi_{j-1}} + pa_j^2\phi_{j-1} - \frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1} + p\frac{\partial^2\phi_{j-1}}{\partial y^2} = 0 \tag{24}$$

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_j\right)\underline{\phi_j} + pa_j^2\phi_{j-1} - \frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1} + p\frac{\partial^2\phi_{j-1}}{\partial y^2} = 0 \tag{25}$$

また、

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_{j+1}\right)\phi_j = p\phi_{j+1} \tag{26}$$

(26) 式 - (25) 式より $\dfrac{\partial}{\partial x}$ の項を消去すると

$$p\left(a_{j+1} + a_j\right)\phi_j = p\phi_{j+1} + pa_j^2\phi_{j-1} - \frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1} + p\frac{\partial\phi_{j-1}}{\partial y^2} \tag{27}$$

or

$$p\tilde{\beta}_j\phi_j^{(1)} - pa_j^2\phi_{j-1}^{(1)} + \frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1}^{(1)} - p\phi_{j-1}^{(1)}{}'' = p\phi_{j+1}^{(1)} \tag{28}$$
$$\tilde{\beta}_j = a_j + a_{j+1}$$

ϕ_j の試行関数を τ_j とすると (28) 式の弱形式は、

$$\int_B \tau_j p\tilde{\beta}_j\phi_j dB = \int_B \tau_j pa_j^2\phi_{j-1}dB - \int_B \tau_j\frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1}dB - \int_B \tau_j' p\phi_{j+1}' dB + \int_B \tau_j p\phi_{j+1}dB \tag{29}$$

したがって、

$$\tilde{\beta}_j[Qb]\phi_j^{(1)} = a_j^2[Qb]\phi_{j-1}^{(1)} - \frac{1}{c_0^2}[Tb]\ddot{\phi}_{j-1}^{(1)} - [Rb]\phi_{j-1}^{(1)} + [Qb]\phi_{j+1}^{(1)} \tag{30}$$

6　弱形式 $\underline{\phi_1^{(J1)} = \phi_0^{(2)}}$

(11) 式

$$p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2}q\ddot{\phi}_j = 0$$

ここで、

$$p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2} = p\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{j+1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + a_{j+1}\right)\phi_j + pa_{j+1}^2\phi_j \tag{31}$$

を代入し、j → j-1 とおくと、

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}-a_j\right)\underline{\left(\frac{\partial}{\partial x}+a_j\right)\phi_{j-1}^{(1)}}+pa_j^2\phi_{j-1}^{(1)}-\frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1}^{(1)}+p\frac{\partial^2\phi_{j-1}^{(1)}}{\partial y^2}=0 \tag{32}$$

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}-a_j\right)\underline{\phi_j^{(1)}}+pa_j^2\phi_{j-1}^{(1)}-\frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1}^{(1)}+p\frac{\partial^2\phi_{j-1}^{(1)}}{\partial y^2}=0 \qquad (j=J_1) \tag{33}$$

また、

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c_1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_j^{(1)}=p\phi_1^{(2)} \tag{34}$$

(34) 式 - (33) 式より $\dfrac{\partial}{\partial x}$ の項を消去すると

$$p\left(\frac{1}{c_1}\frac{\partial}{\partial t}+a_j\right)\phi_j^{(1)}=p\phi_1^{(2)}+pa_j^2\phi_{j-1}^{(1)}-\frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1}^{(1)}+p\frac{\partial\phi_{j-1}^{(1)}}{\partial y^2} \tag{35}$$

or

$$p\beta_0\dot{\phi}_j^{(1)}+pa_j\phi_j^{(1)} \quad =p\phi_1^{(2)}+pa_j^2\phi_{j-1}^{(1)}-\frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1}^{(1)}+p\phi_{j-1}^{(1)}{}'' \tag{36}$$

$$(j=J_1)$$

$$\beta_0=\frac{1}{c_1}$$

(36) 式の弱形式

$$\int_B\tau_jp\beta_0\dot{\phi}_j^{(1)}dB+\int_B\tau_jpa_j\phi_j^{(1)}dB=$$

$$\int_B\tau_jpa_j^2\phi_{j-1}^{(1)}dB-\int_B\tau_j\frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1}^{(1)}dB-\int_B\tau_j'p\phi_{j+1}^{(1)}{}'dB+\int_B\tau_jp\phi_1^{(2)}dB \tag{37}$$

$$(j=J_1)$$

したがって、

$$\beta_0[Qb]\dot{\phi}_j^{(1)}+a_j[Qb]\phi_j^{(1)}=a_j^2[Qb]\phi_{j-1}^{(1)}-\frac{1}{c_0^2}[Tb]\ddot{\phi}_{j-1}^{(1)}-[Rb]\phi_{j-1}^{(1)}+[Qb]\phi_1^{(2)} \tag{38}$$

$$(j=J_1)$$

7 弱形式 $\underline{\phi_0^{(2)}=u}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c_1}\frac{\partial}{\partial t}\right)u=\phi_1^{(2)} \tag{39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\phi_1^{(2)}-\frac{1}{c_1}\dot{u} \tag{40}$$

(1) 式の弱形式 ((20) 式) は、

$$\iint_\Omega\frac{1}{c_0^2}q\ddot{u}+p\nabla w\cdot\nabla ud\Omega-\int_B pw\frac{\partial u}{\partial x}dB=0$$

(40) 式を (20) 式に代入すると

$$\iint_\Omega\frac{1}{c_0^2}q\ddot{u}+p\nabla w\cdot\nabla ud\Omega-\int_B pw\left(\phi_1^{(2)}-\frac{1}{c_1}\dot{u}\right)dB=0 \tag{41}$$

したがって、

$$[M]\ddot{u} + \beta_0[Qb]\dot{u} + [K]u = [Qb]\phi_1^{(2)} \tag{42}$$

$$\beta_0 = \frac{1}{c_1}$$

8 弱形式 $\underline{\phi_1^{(2)} \cdots \phi_{J2-1}^{(2)}}$

(11) 式

$$p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2}q\ddot{\phi}_j = 0$$

ここで、

$$p\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2} = p\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_{j+1}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_{j+1}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_j + p\frac{1}{c_{j+1}^2}\ddot{\phi}_j \tag{43}$$

を代入し、j → j-1 とおくと、

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_j}\frac{\partial}{\partial t}\right)\underline{\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_j}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_{j-1}} + \left(\frac{p}{c_j^2} - \frac{q}{c_0^2}\right)\ddot{\phi}_{j-1} + p\frac{\partial^2\phi_{j-1}}{\partial y^2} = 0 \tag{44}$$

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_j}\frac{\partial}{\partial t}\right)\underline{\phi_j} + \left(\frac{p}{c_j^2} - \frac{q}{c_0^2}\right)\ddot{\phi}_{j-1} + p\frac{\partial^2\phi_{j-1}}{\partial y^2} = 0 \tag{45}$$

また、

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_{j+1}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_j = p\phi_{j+1} \tag{46}$$

(46) 式 - (45) 式より $\dfrac{\partial}{\partial x}$ の項を消去すると

$$p\left(\frac{1}{c_{j+1}} + \frac{1}{c_j}\right)\frac{\partial}{\partial t}\phi_j = p\phi_{j+1} + \left(\frac{p}{c_j^2} - \frac{q}{c_0^2}\right)\ddot{\phi}_{j-1} + p\frac{\partial^2\phi_{j-1}}{\partial y^2} \tag{47}$$

or

$$p\beta_j\dot{\phi}_j^{(2)} - \left(\frac{p}{c_j^2} - \frac{q}{c_0^2}\right)\ddot{\phi}_{j-1}^{(2)} - p\phi_{j-1}^{(2)}{}'' = p\phi_{j+1}^{(2)} \tag{48}$$

$$\beta_j = \frac{1}{c_j} + \frac{1}{c_{j+1}}$$

(48) 式の弱形式

$$\int_B \tau_j p\beta_j\dot{\phi}_j dB = \int_B \tau_j\frac{p}{c_j^2}\ddot{\phi}_{j-1}dB - \int_B \tau_j\frac{q}{c_0^2}\ddot{\phi}_{j-1}dB - \int_B \tau_j' p\phi_{j+1}' dB + \int_B \tau_j p\phi_{j+1}dB \tag{49}$$

したがって、

$$\beta_j[Qb]\dot{\phi}_j^{(2)} = \left(\frac{1}{c_j^2}[Qb] - \frac{1}{c_0^2}[Tb]\right)\ddot{\phi}_{j-1}^{(2)} - [Rb]\phi_{j-1}^{(2)} + [Qb]\phi_{j+1}^{(2)} \tag{50}$$

9 まとめ

境界上に複数の媒質があり、伝搬波とエバネセント波が両方ある場合を考慮した時間領域 FEM の高次 ABC を定式化した。なお、周波数領域 FEM についても $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} \to jb$ (b:伝搬定数 (位相定数)) とすることで定式化できる。