Frequency Domain FEM Analysis of Discontinuity Problems for H-plane Waveguides

ryujimiya

2021 年 05 月 12 日

1　はじめに

H 面導波路の不連続問題を解く。
ポート境界上の界の取り扱いにはいくつか方法が考えられるがここでは固有モード展開を用いた定式化を示す。

2　弱形式

H 面導波路 (TE モード) の電界に関する弱形式は、

$$\int_\Omega p_{xx}\frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{\partial E_z}{\partial y} + p_{yy}\frac{\partial E_z}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial x} - k_0^2 q_{zz} E_z E_z d\Omega = \int_\Gamma p_{yy} E_z \frac{\partial E_z}{\partial n} d\Gamma \tag{1}$$

ここに、$p = \mu_r^{-1}$、$q = \epsilon_r$, ϵ_r:比誘電率, μ_r: 比透磁率である。$n = -x$ は境界の法線ベクトルである。

$$p = \begin{bmatrix} p_{xx} & & \\ & p_{yy} & \\ & & p_{zz} \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_{xx} & & \\ & q_{yy} & \\ & & q_{zz} \end{bmatrix}$$

離散化すると、

$$\sum_j \Big[\int_\Omega p_{xx}\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} + p_{yy}\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} - k_0^2 q_{zz} N_i N_j d\Omega \Big] = \int_\Gamma p_{yy} N_i \frac{\partial E_z}{\partial n} d\Gamma \tag{2}$$

N_i: 節点 i の形状関数である。

3　固有モード展開

ポート境界上の界を固有モード関数 f_m、g_m で展開する。

$$E_z = \sum_m (a_m e^{-j\beta_m x} + b_m e^{j\beta_m x}) f_m(y) \tag{3}$$

$$H_y = \sum_m (a_m e^{-j\beta_m x} - b_m e^{j\beta_m x}) g_m(y) \tag{4}$$

規格化条件は、

$$\int_\Gamma f_m(y) g_m^*(y) d\Gamma = -\frac{\beta^*}{|\beta|} \tag{5}$$

E_z の式に $g_{m'}^*$ を掛けて境界積分すると、

$$\begin{aligned}\int_\Gamma E_z g_{m'}^* d\Gamma &= (a_{m'} e^{-j\beta_{m'} x} + b_{m'} e^{j\beta_{m'} x}) \int_\Gamma f_{m'} g_{m'}^* d\Gamma \\ &= -\frac{\beta_{m'}^*}{|\beta_{m'}|}(a_{m'} e^{-j\beta_{m'} x} + b_{m'} e^{j\beta_{m'} x}) \end{aligned} \tag{6}$$

$$b_{m'} = -a_{m'} e^{-2j\beta_{m'} x} - \frac{|\beta_{m'}|}{\beta_{m'}^*} e^{-j\beta_{m'} x} \int_\Gamma E_z g_{m'}^* d\Gamma \tag{7}$$

$\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{E}$ で表すと、

$$H_z = 0 \tag{8}$$

$$H_x = -\frac{p_{xx}}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial y} \tag{9}$$

$$H_y = \frac{p_{yy}}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{10}$$

であるから、(2) 式の右辺は、

$$\begin{aligned}-\int_\Gamma p_{yy} N_i \frac{\partial E_z}{\partial x} d\Gamma &= -j\omega\mu_0 \int_\Gamma N_i H_y d\Gamma \\ &= -j\omega \int_\Gamma N_i \sum_m (a_m - b_m) g_m d\Gamma \\ &\quad (x = 0 \text{ とおいた}) \\ &= -j\omega\mu_0 \sum_m \left(a_m \int_\Gamma N_i g_m d\Gamma - b_m \int_\Gamma N_i g_m d\Gamma \right) \\ &= -j\omega\mu_0 2a_0 \int_\Gamma N_i g_0 d\Gamma - j\omega\mu_0 \sum_m \frac{|\beta_m|}{\beta_m^*} \left(\sum_j \int_\Gamma N_j g_m^* d\Gamma E_{zj} \right) \int_\Gamma N_i g_m d\Gamma \\ &= -j\omega\mu_0 2a_0 \int_\Gamma N_i g_0 d\Gamma - j\omega\mu_0 \sum_m \left(\frac{|\beta_m|}{\beta_m} \int_\Gamma N_i g_m d\Gamma \sum_j \int_\Gamma N_j g_m^* d\Gamma E_{zj} d\Gamma E_{zj} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

(2) 式の右辺に上式を代入して、

$$\sum_j \Big(\int_\Omega p_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + p_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} - k_0^2 q_{zz} N_i N_j d\Omega$$
$$+ j\omega\mu_0 \sum_m \frac{|\beta_m|}{\beta_m^*} \int_\Gamma N_i g_m d\Gamma \int_\Gamma N_j g_m^* d\Gamma \Big) E_{zj} = -j\omega\mu_0 2a_0 \int_\Gamma N_i g_0 d\Gamma \tag{12}$$

ここで、

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{p_{yy}}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ &= \frac{p_{yy}}{j\omega\mu_0} \sum_m (-j\beta_m)(a_m e^{-j\beta_m x} - b_m e^{j\beta_m x}) f_m \end{aligned} \tag{13}$$

(4) 式と比較すると、

$$\begin{aligned} g_m &= -p_{yy} \frac{j\beta_m}{j\omega\mu_0} f_m \\ &= -p_{yy} \frac{\beta_m}{\omega\mu_0} f_m \end{aligned} \tag{14}$$

(14) 式を (12) 式に代入すると、

$$\sum_j \Big(\int_\Omega p_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + p_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} - k_0^2 q_{zz} N_i N_j d\Omega$$
$$+ \frac{j}{\omega\mu_0} \sum_m \beta_m |\beta_m| \int_\Gamma N_i p_{yy} f_m d\Gamma \sum_j \int_\Gamma N_j p_{yy}^* f_m^* \Big) E_{zj} = j2a_0\beta_0 \int_\Gamma N_i p_{yy} f_0 d\Gamma \tag{15}$$

4　反射波・透過波

反射波、透過波は、

$$\begin{aligned} b_m &= -a_m - \frac{|\beta|}{\beta^*} \int_\Gamma E_z g_m^* d\Gamma \\ &= -a_m + \frac{|\beta|}{\omega\mu_0} \int_\Gamma E_z p_{yy}^* f_m^* d\Gamma \\ &= -a_m + \frac{|\beta|}{\omega\mu_0} \sum_j \int_\Gamma N_j p_{yy}^* f_m^* d\Gamma E_{zj} \end{aligned} \tag{16}$$

5　1D 固有モード解析

(2) 式で右辺の境界積分を 0 とおき、領域内積分 $\dfrac{\partial}{\partial x} = -j\beta$ とおく。

$\dfrac{\partial N_i}{\partial x} \dfrac{\partial N_j}{\partial x}$ の項は、$\left(\dfrac{\partial N_i}{\partial x} \right)^* \dfrac{\partial N_j}{\partial x}$ であることに注意すると、

$$\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^* \frac{\partial N_j}{\partial x} = \beta^2$$

より、

$$\sum_j \Big(\int_\Omega p_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \beta^2 p_{yy} N_i N_j - k_0^2 q_{zz} N_i N_j d\Omega \Big) E_{zj} = 0 \tag{17}$$

$$\Big([T_{xx}] + \beta^2 [R_{yy}] - k_0^2 [U_{zz}] \Big) \{E_z\} = 0 \tag{18}$$

$$\Big(k_0^2 [U_{zz}] - [T_{xx}] \Big) \{E_z\} = \beta^2 [R_{yy}] \{E_z\} \tag{19}$$

or

$$[A]\{E_z\} = \beta^2 [B]\{E_z\} \tag{20}$$

規格化定数は、

$$\begin{aligned} \int_\Omega f g^* d\Omega &= -\frac{\beta^*}{|\beta|} \\ -\frac{\beta^*}{\omega\mu_0} \int_\Omega p_{yy}^* f f^* d\Omega &= -\frac{\beta^*}{|\beta|} \\ \int_\Omega p_{yy}^* f f^* d\Omega &= \frac{\omega\mu_0}{|\beta|} \end{aligned} \tag{21}$$

規格化定数を

$$f = d\{N\}^T \{E_z\} \tag{22}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} |d|^2 \{E_z\}^{*T} [R_{yy}]^{*T} \{E_z\} &= \frac{\omega\mu_0}{|\beta|} \\ d &= \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{|\beta|(\{E_z\}^\dagger [R_{yy}]^\dagger \{E_z\})}} \end{aligned} \tag{23}$$

6　まとめ

H 面導波路の不連続問題を固有モード展開を用いた FEM で定式化した。

7　参考文献

なし