RANS(Reynolds Averaged Navier Stokes) Formulation for Turbulent Flow

ryujimiya

2021 年 05 月 04 日

1　はじめに

乱流 (turbulence) を伴う流体の支配方程式として RANS(Reynolds Averaged Navier Stokes) 方程式がある。
RANS に付随する乱流モデルには各種存在するが、本書では標準 $k-\epsilon$ モデル、RNG $k-\epsilon$ モデルを扱う。

2　RANS 方程式と標準 $k-\epsilon$ モデル

$\boldsymbol{u}$: 速度、P を圧力とする。質量の方程式は、

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{1}$$

運動方程式、すなわち RANS 方程式は標準 $k-\epsilon$ モデルでは

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \left\{ (\mu + \mu_t)(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) \right\} - \nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \rho \kappa \boldsymbol{I} \right) \tag{2}$$

ここに κ: 乱流運動エネルギー (turbulent kinetic energy)、ϵ: 消散率 (dissipation of turbulent energy) であり、次式を満たす。

$$\frac{\partial(\rho \kappa)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \kappa) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \nabla \kappa \right) + G_\kappa - \rho \epsilon \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \epsilon) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right) + \frac{\epsilon}{\kappa} (C_{1\epsilon} G_\kappa - C_{2\epsilon} \rho \epsilon) \tag{4}$$

$C_{1\epsilon} = 1.44$, $C_{2\epsilon} = 1.92$
$\sigma_\kappa = 1.00$, $\sigma_\epsilon = 1.3$

$$G_\kappa = 2 \mu_t S_{ij}^2 \tag{5}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{6}$$

μ_t: 渦粘性係数 (eddy viscosity)

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{\kappa^2}{\epsilon} \tag{7}$$

$C_\mu = 0.09$

3　標準 $k-\epsilon$ モデルの支配方程式の成分表示

(1) 式の成分表示:

$$\rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \tag{8}$$

(2) 式の成分表示:

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = \rho \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k)\boldsymbol{e}_i \simeq \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i \tag{9}$$

と近似すると、

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + (\mu + \mu_t)\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\right) - \frac{2}{3}\rho \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \tag{10}$$

(3) 式の成分表示:

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\kappa) = \rho \frac{\partial}{\partial x_k}(u_k \kappa) \simeq \rho u_k \frac{\partial \kappa}{\partial x_k} \tag{11}$$

と近似すると、

$$\rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \kappa}{\partial x_k} = \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa}\frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_k^2} + G_\kappa - \rho\epsilon \tag{12}$$

(4) 式の成分表示:

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\epsilon) = \rho \frac{\partial}{\partial x_k}(u_k \epsilon) \simeq \rho u_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \tag{13}$$

と近似すると、

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_k^2} + \frac{\epsilon}{\kappa}(C_{1\epsilon} G_\kappa - C_{2\epsilon}\rho\epsilon) \tag{14}$$

4　標準 $k-\epsilon$ モデルの弱形式

(1) 式にガラーキン法を適用すると、

$$\int_V \delta P \frac{\partial u_k}{\partial x_k} dV = 0 \tag{15}$$

(2) 式にガラーキン法を適用すると、

$$\int_V \delta u_i \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \delta u_i \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} P + (\mu + \mu_t) \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial u_i} + (\mu + \mu_t) \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \delta u_i \frac{2}{3} \rho \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} dV = 0 \tag{16}$$

(3) 式にガラーキン法を適用すると、

$$\int_V \rho \delta \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \rho \delta \kappa u_k \frac{\partial \kappa}{\partial x_k} + \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \delta \kappa}{\partial x_k} \frac{\partial \kappa}{\partial x_k} - \delta \kappa G_\kappa + \rho \delta \kappa \epsilon dV = 0 \tag{17}$$

(4) 式にガラーキン法を適用すると、

$$\int_V \rho \delta \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \delta \epsilon u_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \delta \epsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} - \delta \epsilon \frac{\epsilon}{\kappa} (C_{1\epsilon} G_\kappa - C_{2\epsilon} \rho \epsilon) dV = 0 \tag{18}$$

5　標準 $k-\epsilon$ モデルの離散化方程式

(1) 式、(2) 式の離散化：離散化したときの $\boldsymbol{u}$ の節点番号を a,b とし、$\boldsymbol{u}$ の成分を i,j とする。離散化したときの P の節点番号を c,d とする。補間関数を使うと、

$$u_j = N^b u_j^b \tag{19}$$

$$P = M^d P^d \tag{20}$$

(2) 式を離散化すると、

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_2 \boldsymbol{P} + \boldsymbol{K}_3 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_4 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} = 0 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{ab} = \int_V \rho N^a N^b \delta_{ij} dV \tag{22}$$

$$\boldsymbol{K}_1^{ab} = \int_V N^a \rho u_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \delta_{ij} dV \tag{23}$$

$$\boldsymbol{K}_{2i}^{ad} = -\int_V \frac{\partial N^a}{\partial x_i} M^d dV \tag{24}$$

$$\boldsymbol{K}_{3ij}^{ab} = \int_V (\mu + \mu_t) \frac{\partial N^a}{\partial x_j} \frac{\partial N^b}{\partial x_i} dV \tag{25}$$

$$\boldsymbol{K}_{4ij}^{ab} = \int_V (\mu + \mu_t) \frac{\partial N^a}{\partial x_k} \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \delta_{ij} dV \tag{26}$$

$$\boldsymbol{f}_i = \int_V N^a \frac{2}{3} \rho \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} dV \tag{27}$$

(1) 式を離散化すると、

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = 0 \tag{28}$$

$$\boldsymbol{K}_j^{cb} = \int_V M^c \frac{\partial N^b}{\partial x_j} dV \tag{29}$$

(3) 式、(4) 式の離散化：離散化したときの κ の節点番号を a,b とする。離散化したときの ϵ の節点番号を c,d とする。補間関数を使うと、

$$\kappa = N^b \kappa^b \tag{30}$$

$$\epsilon = M^d \epsilon^d \tag{31}$$

補助変数

$$\gamma = \frac{\epsilon}{\kappa} \tag{32}$$

を導入すると、κ と ϵ を分離した方程式ができる。
(3) 式を離散化すると、

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\kappa}} + \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{K}_3\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{f} = 0 \tag{33}$$

$$\boldsymbol{M}^{ab} = \int_V \rho N^a N^b dV \tag{34}$$

$$\boldsymbol{K}_1^{ab} = \int_V \rho N^a u_k \frac{\partial N^b}{\partial x_k} dV \tag{35}$$

$$\boldsymbol{k}_2^{ab} = \int_V \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \frac{\partial N^a}{\partial x_k} \frac{\partial N^b}{\partial x_k} dV \tag{36}$$

$$\boldsymbol{K}_3^{ab} = \int_V \rho \gamma N^a N^b dV \tag{37}$$

$$\boldsymbol{f} = -\int_V N^a G_\kappa dV \tag{38}$$

(4) を離散化すると、

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{K}_3\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{f} = 0 \tag{39}$$

$$\boldsymbol{M}^{cd} = \int_V \rho M^c M^d dV \tag{40}$$

$$\boldsymbol{K}_1^{cd} = \int_V \rho M^c u_k \frac{\partial M^d}{\partial x_k} dV \tag{41}$$

$$\boldsymbol{K}_2^{cd} = \int_V \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial M^c}{\partial x_k} \frac{\partial M^d}{\partial x_k} dV \tag{42}$$

$$\boldsymbol{K}_3^{cd} = -\int_V M^c \gamma (-C_{2\epsilon} \rho M^d) dV \tag{43}$$

$$\boldsymbol{f} = -\int_V M^c \gamma C_{1\epsilon} G_\kappa dV \tag{44}$$

6 RNG $k-\epsilon$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho\kappa)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\kappa\boldsymbol{u}) &= \nabla\cdot(\alpha_\kappa\mu_{eff}\nabla\kappa) + G_\kappa - \rho\epsilon \quad (45)\\
\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\epsilon\boldsymbol{u}) &= \nabla\cdot(\alpha_\epsilon\mu_{eff}\nabla\epsilon) + C_{1\epsilon}\frac{\epsilon}{\kappa}G_\kappa - C_{2\epsilon}\rho\frac{\epsilon^2}{\kappa}\\
&\quad \underline{-\frac{\eta(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3}\frac{\epsilon}{\kappa}G_\kappa} \quad (46)\\
\mu_{eff} &= \mu + \mu_t \quad (47)\\
\mu_t &= \rho C_\mu\frac{\kappa^2}{\epsilon} \quad (48)\\
& \quad (49)
\end{aligned}
$$

$C_\mu = 0.0845$

$\alpha_\kappa = \alpha_\epsilon = 1.39$

$C_{1\epsilon} = 1.42$, $C_{2\epsilon} = 1.68$

$$
\begin{aligned}
G_\kappa &= 2\mu_t S_{ij}^2 \quad (50)\\
\eta &= \frac{\kappa}{\epsilon}\sqrt{2S_{ij}^2} \quad (51)
\end{aligned}
$$

$\eta_0 = 4.377$, $\beta = 0.012$

7 境界条件

inflow Γ_{in}:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \quad (52)\\
&\kappa = C_{bc}|\boldsymbol{u}|^2 \quad (53)\\
&\quad C_{bc} : [0.003, 0.01]\\
&\epsilon = C_\mu\frac{\kappa^{3/2}}{l_0} \quad (54)\\
&\quad l_0 : [l_{min}, l_{max}]\\
&\quad l_{min}\text{渦の最小サイズ}
\end{aligned}
$$

outflow Γ_{out}:

全ての変数の法線方向傾斜は 0。自然境界条件。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T) &= 0 \quad (55)\\
\boldsymbol{n}\cdot\nabla\kappa &= 0 \quad (56)\\
\boldsymbol{n}\cdot\nabla\epsilon &= 0 \quad (57)
\end{aligned}
$$

solid wall:
乱流場では法線方向速度のみ 0 を指定する。接線方向の滑り (tangential slip) は許す。

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{58}$$

8 まとめ

標準 $k - \epsilon$ モデル、RNG $k - \epsilon$ モデルを用いて乱流場の定式化を行った。

9 参考文献

[1] Hongying Li, Fong Yew Leong, George Xu, Zhengwei Ge, Chang Wei Kang, and Keng Hui Lim, "Dispersion of evaporating cough droplets in tropical outdoor environment", Phys. Fluids 32, 113301 (2020), Published Online: 03 November 2020

[2] Dmitri Kuzmin, Otto Mierka, "On the implementation of the κ - ε turbulence model in incompressible flow solvers based on a finite element discretisation", International Journal of Computing Science and Mathematics 1(2), January 2007

[3] オープン CAE 勉強会@関東, 「数値流体力学」輪講 第 7 回, 第 3 章：乱流とそのモデリング (6), March 2014