Finite Calculus (FIC) Formulation for Fluid Dynamics

ryujimiya

2021 年 04 月 07 日

1　はじめに

流体の粒子の移動を解析する一つの方法として、Finite Calculus(FIC) Formulation がある。
これは、「無限小の」支配方程式を修正して「有限の」領域に対する支配方程式を定式化する方法である。
支配方程式は Lagrange 表示を用いるので、FEM(Finite element method) での要素分割は現在の位置 (current configuration) で更新する。

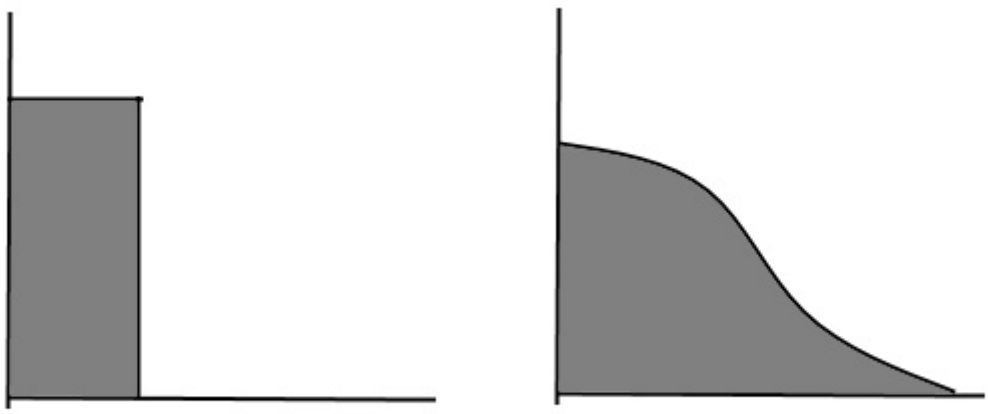

図 1　Collapse of a water column

2　非圧縮流体の Lagrange 方程式

運動方程式 (Momentum)

$$r_{mi} = 0 \quad in\ \Omega \tag{1}$$

質量のつりあい (Mass balance)

$$r_d = 0 \quad in\ \Omega \tag{2}$$

ここに、

$$r_{mi} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - b_i \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{4}$$

$$r_d = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{5}$$

$i, j = 1, n_d$(d:扱う問題の次元、本書では 2 次元)
b_i: body forces

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - \delta_{ij} p \tag{6}$$

p: absolute pressure
s_{ij}: viscous deviatoric stress

$$s_{ij} = 2\mu \left(\hat{\epsilon_{ij}} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \tag{7}$$

$\hat{\epsilon_{ij}}$: strain rate
μ: viscosity

$$\hat{\epsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tag{8}$$

3　Finite Calculus (FIC) Formulation

FIC Formulation の定式化 (Appendix A 参照) の結果を示すと、
運動方程式 (Momentum)

$$r_{mi} - \underline{\frac{1}{2} h_j \frac{\partial r_{mi}}{\partial x_j}} = 0 \tag{9}$$

質量のつりあい (Mass balance)

$$r_d - \underline{\frac{1}{2} h_j \frac{\partial r_d}{\partial x_j}} = 0 \tag{10}$$

h_j は領域の characteristic length で、要素面積 A_e のルートを用いた。$hi = h = \sqrt{A_e}$
下線で示した部分が FIC Formulation により追加された項である。

質量つりあいの式は次のように変換できる (Appendix B 参照)。

$$r_d - \sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial r_{mi}}{\partial x_i} = 0 \tag{11}$$

$$\tau_i = \tau = \left(\frac{2\rho|\boldsymbol{v}|}{h} + \frac{8\mu}{3h^2} \right)^{-1} \tag{12}$$

Lagrange 表示では対流項が消滅することに注意。

4　重み付き残差法による定式化

重み付き残差法による定式化は次式となる。

$$\int_\Omega \delta v_i r_{mi} d\Omega + \int_\Gamma \delta v_i \left(n_j \sigma_{ij} - t_i \right) d\Gamma = 0 \tag{13}$$

$$\int_\Omega \delta p \left[r_d - \sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial r_{mi}}{\partial x_i} \right] d\Omega = 0 \tag{14}$$

上式を部分積分すると、

$$\int_\Omega \left[\delta v_i \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \delta \hat{\epsilon}_{ij} (s_{ij} - \delta_{ij} p) \right] d\Omega - \int_\Omega \delta v_i b_i d\Omega - \int_\Gamma \delta v_i t_i d\Gamma = 0 \tag{15}$$

$$\int_\Omega \delta p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} r_{mi} \right] d\Omega = 0 \tag{16}$$

δv_i、$\delta \hat{\epsilon}_{ij}$、$\delta p$ は、速度、strain rate、圧力の変分である。

5　補助変数の導入

pressure gradient projection π_i を導入して簡素化する。

$$\pi_i = r_{mi} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{17}$$

上式の r_{mi} を π_i について表すと r_{mi} が消滅する。
最終的には、

$$\int_\Omega \left[\delta v_i \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \delta \hat{\epsilon_{ij}} (s_{ij} - \delta_{ij} p) \right] d\Omega - \int_\Omega \delta v_i b_i d\Omega - \int_\Gamma \delta v_i t_i d\Gamma = 0 \tag{18}$$

$$\int_\Omega \delta p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n_d} \tau_i \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \pi_i \right) d\Omega = 0 \tag{19}$$

$$\int_\Omega \delta \pi_i \tau_i \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \pi_i \right) d\Omega = 0 \quad \text{no sum in i} \tag{20}$$

$$i, j, k = 1, n_d$$

$\delta \hat{\epsilon}_i j$ は $\hat{\epsilon}_i j$ の変分である。

6 FEM による離散化

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} N_j \overline{v}_i^j \tag{21}$$

$$p = \sum_{j=1}^{n} N_j \overline{p}^j \tag{22}$$

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{n} N_j \overline{\pi}_i^j \tag{23}$$

$\overline{(\cdot)}$ は節点値、N_j は形状関数である。
これらを前章の結果 (18)(19)(20) 式に代入すると、

$$\boldsymbol{M}\dot{\overline{\boldsymbol{v}}} + \boldsymbol{K}\overline{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{G}\overline{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{f} = 0 \tag{24}$$

$$\boldsymbol{G}^T\overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{L}\overline{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{Q}\overline{\boldsymbol{\pi}} = 0 \tag{25}$$

$$\boldsymbol{Q}^T\overline{\boldsymbol{p}} + \hat{\boldsymbol{M}}\overline{\boldsymbol{\pi}} = 0 \tag{26}$$

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{27}$$

$$\boldsymbol{M}_{ij} = \int_\Omega \rho N_i N_j d\Omega \tag{28}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij} = \int_\Omega \boldsymbol{B}_i^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_j d\Omega \tag{29}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{D} = \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{for 2D} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{G}_{ij} = \int_\Omega \boldsymbol{B}_i^T \boldsymbol{m} N_j d\Omega \tag{32}$$

$$\boldsymbol{f}_i = \int_\Omega N_i \boldsymbol{b} d\Omega + \int_\Gamma N_i \boldsymbol{t} d\Omega \tag{33}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}^T \quad \text{body force} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix}^T \quad \text{surface tractions} \tag{35}$$

$$\boldsymbol{L}_{ij} = \int_\Omega \tau_k \frac{\partial N_i}{\partial N_k} \frac{\partial N_j}{\partial N_k} d\Omega \tag{36}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^1 & \boldsymbol{Q}^2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\boldsymbol{Q}_{ij}^k = \int \tau_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k} N_j d\Omega \tag{38}$$

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{M}}^1 & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{M}}^2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\hat{\boldsymbol{M}}_{ij}^k = \int_\Omega \tau_k N_i N_j d\Omega \tag{40}$$

上式はすべて現在位置 (current configuration) について計算する。
導出された行列方程式は非線形であり、反復計算を行う。
反復計算の結果得られた速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$ を用いると、流体の節点位置を次式で計算できる。

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{n+1} = \overline{\boldsymbol{x}}^n + \overline{\boldsymbol{v}}^{n+1} \Delta t \tag{41}$$

Δt は時間刻み幅である。なお、時間の離散化は Newmark β を用いた。

7 Appendix A：Finite Calculus (FIC) Formulation の導出

Onate とその同僚によって開発された FIC は支配方程式を再定式化している。
修正された方程式はつりあいの法則の「有限のサイズ (finite size)」の領域の式となる。
新たに導入された項は安定な物理解を得る基礎となる。つまり安定化数値解法 (stabilized numerical meth-

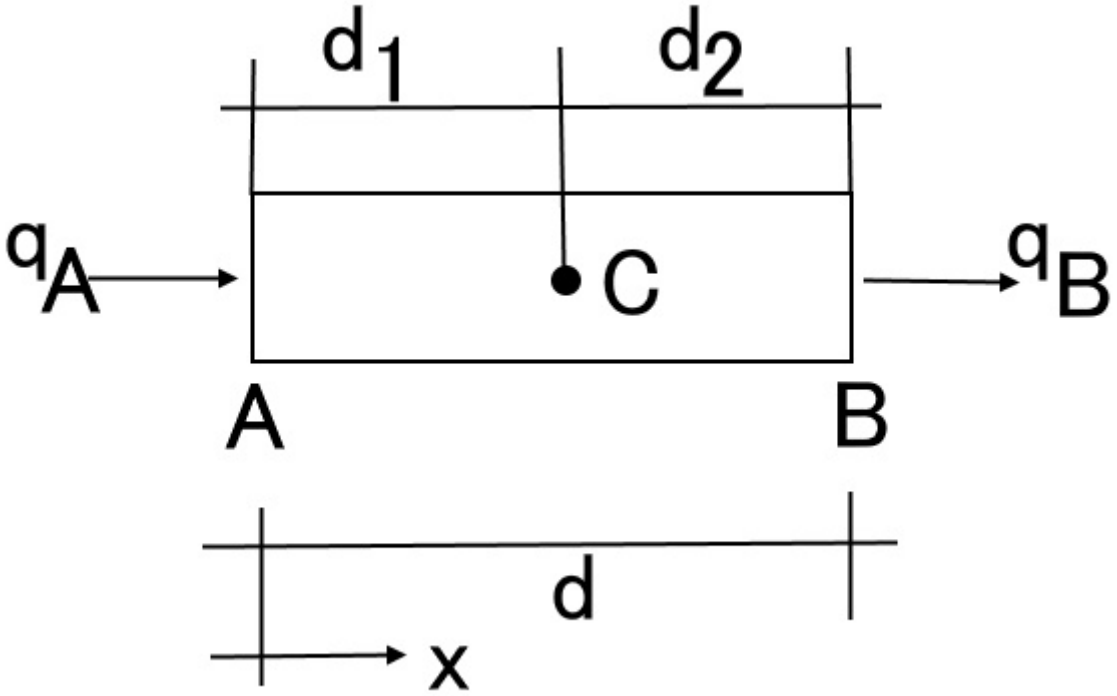

図 2　balance

ods) である。
定常状態の対流移流問題を例に説明する。1D 問題、A、B を端とする長さ d の梁の flux のつりあいは、

$$q_A - q_B = 0 \tag{42}$$

q_A、q_B は入出力 flux である。
flux q は次式となる。

$$q = u\phi - k\frac{d\phi}{dx} \tag{43}$$

ϕ:輸送量 (transported variable)、例えば熱
u: 速度
k: 拡散率 (diffusivity)
q_A と q_B を任意の点 C の flus を使って表す。q_A、q_B を点 C についての Taylor 級数展開すると、

$$q_A = q_C - d_1 \left.\frac{dq}{dx}\right|_C + \frac{d_1^2}{2}\frac{d^2q}{dx^2} + O(d_1^3) \tag{44}$$

$$q_B = q_C + d_2 \left.\frac{dq}{dx}\right|_C + \frac{d_2^2}{2}\frac{d^2q}{dx^2} + O(d_2^3) \tag{45}$$

$$\tag{46}$$

これらを (42) 式に代入すると、

$$\frac{dq}{dx} - \underline{\frac{h}{2}\frac{d^2q}{dx^2}} = 0 \tag{47}$$
$$(h = d_1 - d_2)$$

下線部分が無限小の支配方程式に追加された項である。
ソース項も含めた形に拡張すると、FIC Formulation のつりあいの式となる。

$$r - \underline{\frac{h}{2}\frac{dr}{dx}} = 0 \tag{48}$$

ここに、

$$r = -u\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx}\left(k\frac{d\phi}{dx}\right) + Q \tag{49}$$

Q: external force
なお、$h = 0$ とすると標準的な熱伝導方程式と一致する。

8 Appendix B:(11) 式の導出

(9) 式

$$r_{mi} - \frac{1}{2}h_j\frac{\partial r_{mi}}{\partial x_j} = 0$$

(3) 式

$$r_{mi} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - b_i$$

(7) 式

$$s_{ij} = 2\mu\left(\hat{\epsilon_{ij}} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)$$

より、

$$\frac{\partial r_d}{\partial x_i} = -\frac{1}{a_i}\left[\overline{r}_{mi} - \frac{h_i}{2}\frac{\partial r_{mi}}{\partial x_j}\right] - \frac{\rho v_i h_k}{2a_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \tag{50}$$

$$i, j = 1, n_d, \quad k \neq i$$

$$a_i = \frac{2\mu}{3} \tag{51}$$

$$\overline{r}_{mi} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu\hat{\epsilon}_i j) - b_i \tag{52}$$

(50) 式を (10) 式

$$r_d - \frac{1}{2}h_j\frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \tag{53}$$

に代入すると、

$$r_d - \sum_{i=1}^{n_d}\tau_i\frac{\partial r_{mi}}{\partial x_i} = 0 \tag{54}$$

$$\tau_i = \frac{3h^2}{8\mu} \tag{55}$$

9 まとめ

「有限なサイズ」の領域における支配方程式として Finite Calculus Formulation を用い、流体問題に適用した。

10 参考文献

[1] Sergio Rodolfo Idelsohn, Facundo Del Pin, Romain Aubry, "The particle finite element method. An overview", International Journal of Computational Methods, September 2004

[2] Eugenio Onate, Marco Manzan, "Stabilization techniques for finite element analysis of convection-diffusion problems", ,International Center for Numerical Methods in Engineering, February 2000