Fluid Dynamics - Navier-Stokes Equations -

ryujimiya

2020 年 02 月 14 日

1　はじめに

流体力学の支配方程式である Navier-Stokes 方程式を導く。
準備として連続体の基礎にも触れる。

2　Navier-Stokes 方程式

非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} \rho\dot{\boldsymbol{v}} - \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \nabla p &= \rho\boldsymbol{g} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0 \end{aligned}$$

3　時間導関数

$\boldsymbol{X}$:物質点 (material coordinate)、$\boldsymbol{x}$ は空間座標点 (spacial coordinate) とする。
テンソル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ に対して

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= \left.\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dt && (1) \\ &= \left.\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \left.\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_i}\right|_{t} dx_i && (2) \\ d\boldsymbol{x} &= \left.\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dt \\ &= \boldsymbol{v}dt && (3) \\ d\boldsymbol{A} &= \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}dt \\ &= \left.\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} dt + \left.\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_i}\right|_{t} v_i dt && (4) \\ &= \left.\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} dt + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}dt && (5) \end{aligned}$$

したがって、物質時間導関数 (material time derivative) $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}}$ と、空間時間導関数 (spacial time derivative) $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}}$ の関係は、

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{A} \tag{6}$$

なお、

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} \to \frac{\partial}{\partial t}$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \to \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$$

と記すことがある。
この記法を採用すると、

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{A} \tag{7}$$

スカラー場 $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ とベクトル場 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t)$ に対して、

$$\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi \tag{8}$$
$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{a}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{a} \tag{9}$$

スカラー場のとき $\nabla\phi$ は gradϕ、ベクトル場のとき $\nabla\boldsymbol{a}$ は covariant derivative or Jacobian matrix of $\boldsymbol{a}$ である。

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi = v_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{a} &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\
&= v_1 \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_3} && (11) \\
&= \begin{bmatrix} v_1 \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ v_1 \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ v_1 \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} && (12)
\end{aligned}$$

4 Eular の膨張公式

v を変形後の体積、V を元の体積とすると、

$$
\begin{aligned}
d\dot{v} &= \dot{J} dV && (13)\\
&= \overset{\bullet}{\left(\left[dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3\right]\right)} && (14)\\
&= \overset{\bullet}{\left(\left[\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_3\right]\right)} && (15)\\
&= \left[\dot{\boldsymbol{F}}d\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_3\right] + \left[\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \quad \dot{\boldsymbol{F}}d\boldsymbol{X}_2 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_3\right] + \left[\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2 \quad \dot{\boldsymbol{F}}d\boldsymbol{X}_3\right]\\
&= \left[\left(\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}\right)\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_3\right] + \left[\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \quad \left(\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}\right)\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_3\right]\\
&\quad + \left[\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2 \quad \left(\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}\right)\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_3\right]\\
&= \mathrm{tr}\left\{\left(\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{F}}\right)\left[\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_3\right]\right\} && (16)\\
&= \mathrm{tr}\left\{(\boldsymbol{L})\left[\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2 \quad \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_3\right]\right\} && (17)\\
&= (\mathrm{tr}\boldsymbol{L})(\det\boldsymbol{F})\left[d\boldsymbol{X}_1 \quad d\boldsymbol{X}_2 \quad d\boldsymbol{X}_3\right] && (18)\\
&= (\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v})\, JdV\\
&\quad (\dot{J} = J\mathrm{tr}\boldsymbol{L} = \det\boldsymbol{F}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}, \mathrm{tr}\boldsymbol{L} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} \text{ を用いた})
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X} && (19)\\
F_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} && (20)\\
&= \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i + u_i)\\
&= \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} && (21)\\
&\quad (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} \quad \text{:変位ベクトル}) && (22)
\end{aligned}
$$

で、$\boldsymbol{F}$ は変形勾配テンソルと呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1} && (23)\\
d\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{L}d\boldsymbol{x} && (24)\\
dv_i &= L_{ij}dx_j && (25)\\
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{v} \otimes \nabla_{\boldsymbol{x}} && (26)\\
L_{ij} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} && (27)\\
\mathrm{tr}\boldsymbol{L} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} && (28)\\
\dot{J} &= J\mathrm{tr}\boldsymbol{L} = \det\boldsymbol{F}\mathrm{tr}\boldsymbol{L} && (29)
\end{aligned}
$$

で、$\boldsymbol{L}$ は速度勾配テンソルと呼ばれる。

以上から、ヤコビアンの速度は、

$$
\dot{J} = (\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v})\, J \qquad (30)
$$

5 Reynolds の輸送定理

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \boldsymbol{A} dv &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_V \boldsymbol{A} J dV \\
&\quad (dv = \mathrm{det}\boldsymbol{F} dV = JdV \text{ を用いた}) \\
&= \int_V \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} J + \boldsymbol{A}\dot{J} dV \\
&= \int_V \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} J + \boldsymbol{A}\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) J dV \\
&\quad (\dot{J} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} \text{ を用いた}) \\
&= \int_v \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{A}\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) dv && (31) \\
&= \int_v \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) dv && (32) \\
&= \int_v \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \nabla_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{A}\right) dv && (33) \\
&= \int_v \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} dv + \int_s \boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{A}\right) ds \\
&= \int_v \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} dv + \int_s \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\right) \boldsymbol{A} ds && (34)
\end{aligned}
$$

6 連続の式

物体の質量 m は、質量密度 ρ、物体の占める領域を v として、

$$
m = \int_v \rho dv \tag{35}
$$

質量保存の原理、物質の質量 m が時間に依存せず変形後も一定である。すなわち、

$$
\left.\frac{\partial m}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \rho dv = 0 \tag{36}
$$

これは積分形式の記述である。

微分形式は Reynolds の輸送定理から導く。

Reynolds の輸送定理の $\boldsymbol{A}$ に ρ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \rho dv &= \int_v \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} + \rho\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) dv \\
&= 0 \quad (\text{積分形式の記述より})
\end{aligned}
$$

よって、

$$\int_v \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} + \rho \left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) dv = 0 \tag{37}$$

これが任意の領域 v に対して成り立つので、

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} + \rho \left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) = 0 \tag{38}$$

(連続の式の Lagrange 表示)

が成り立つ。

また、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \rho dv &= \int_v \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \left(\rho \boldsymbol{v}\right) dv \\ &= 0 \quad \text{積分形式の記述より)}\end{aligned}$$

よって、

$$\int_v \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \left(\rho \boldsymbol{v}\right) dv = 0 \tag{39}$$

これが任意の領域 v について成り立つので、

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \left(\rho \boldsymbol{v}\right) = 0 \tag{40}$$

(連続の式の Eular 表示)

Reynolds の輸送定理の特別な場合：輸送される量が密度に比例する量 $\rho\boldsymbol{A}$ の場合、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \rho \boldsymbol{A} dv &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_V \rho \boldsymbol{A} J dV \\ &= \int_V \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{A} J + \rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} J + \rho \boldsymbol{A} \dot{J} dV \\ &= \int_V \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{A} J + \rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} J + \rho \boldsymbol{A} \left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) J dV \\ &= \int_v \left\{ \underline{\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} + \rho \left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right)} \right\} \boldsymbol{A} + \rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dv \\ &= \int_v \rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dv \\ &\text{(連続の式を用いた)}\end{aligned} \tag{41}$$

したがって、

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \rho \boldsymbol{A} dv = \int_v \rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dv \tag{42}$$

となり、物質時間導関数を積分の中に含めることができる。

ここで、質量保存の原理が基準配置を用いてどのように表せられるかを示す。
質量保存の原理から、基準座標の密度を ρ_0 とすると、

$$\rho dv = \rho_0 dV \tag{43}$$

となる。さらに、

$$dv = J dV \tag{44}$$

であるから、次の関係が満たされる。

$$\frac{\rho_0}{\rho} = J \tag{45}$$

7　Cauchy の第一運動法則

Eular の第一法則（運動量保存の法則）より

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \rho \boldsymbol{v} dv = \int_v \rho \boldsymbol{g} dv + \int_s \boldsymbol{t} ds \tag{46}$$

Reynolds の輸送定理の特別な場合：輸送される量が $\rho\boldsymbol{v}$ の場合、

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \rho \boldsymbol{v} dv = \int_v \rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dv \tag{47}$$

また、

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{T} \tag{48}$$

より、右辺は、

$$\begin{aligned} \int_v \rho \boldsymbol{g} dv + \int_s \boldsymbol{t} ds &= \int_v \rho \boldsymbol{g} dv + \int_s \boldsymbol{n}\boldsymbol{T} ds \\ &= \int_v \rho \boldsymbol{g} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{T} dv \qquad (49) \\ &\quad \text{(Gauss の発散定理を用いた。)} \end{aligned}$$

したがって、

$$\int_v \rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dv = \int_v \rho \boldsymbol{g} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{T} dv \tag{50}$$

この式が任意の v に対して成立するので、

$$\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} = \rho \boldsymbol{g} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{T} \tag{51}$$

左辺第一項の物質時間導関数を空間時間導関数に変えると、

$$\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \rho \left(\boldsymbol{v} \nabla_{\boldsymbol{x}}\right) \boldsymbol{v} = \rho \boldsymbol{g} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{T} \tag{52}$$

Eular 表示が得られる。

8　Cauchy の第二運動法則

角運動量の保存に関しては Eular の第二運動法則とよばれる次の原理が成立する。
すなわち、座標の原点に関して物体力および表面力のモーメントと運動量モーメントの速度が等しい。

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v} dv = \int_v \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{g} dv + \int_s \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} ds \tag{53}$$

左辺は、Reynolds の輸送定理の特別な場合、つまり輸送される量が $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v})\,\rho$ のときであり、

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \int_v \rho \left(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}\right) dv &= \int_v \rho \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \left(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}\right) dv \\
&= \int_v \rho \left(\left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} \times \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} \right) dv \\
&= \int_v \boldsymbol{x} \times \rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dv \\
&\qquad \left(\text{ただし、} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}_{\boldsymbol{X}} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0 \text{ を用いた}\right)
\end{aligned} \tag{54}$$

右辺第二項について変形すると、

$$\begin{aligned}
\int_s \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} ds &= \int_s \boldsymbol{x} \times \left(\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{n}\right) ds \\
&= \int_s \left(x_i \boldsymbol{e}_i\right) \times \left(T_{lj} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_l\right) ds \\
&= \int_s \epsilon_{ijk} x_i T_{lj} n_l \boldsymbol{e}_k ds \\
&= \epsilon_{ijk} \int_s x_i T_{lj} n_l ds \boldsymbol{e}_k \\
&= \epsilon_{ijk} \int_v \frac{\partial}{\partial x_l} \left(x_i T_{lj}\right) dv \boldsymbol{e}_k \\
&= \int_v \left\{ \epsilon_{ijk} T_{ij} \boldsymbol{e}_k + \left(x_i \boldsymbol{e}_i\right) \times \left(\frac{\partial T_{lj}}{\partial x_l} \boldsymbol{e}_j \right) \right\} dv \\
&= \int_v \left\{ \epsilon_{ijk} T_{ij} \boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{x} \times \mathrm{div} \boldsymbol{T} \right\} dv
\end{aligned}$$

ただし、ϵ_{ijk} は交代記号で、

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} &= 1 \quad (i,j,k \text{ が } 1 \to 2 \to 3 \text{ の順、偶置換}) \\
&= -1 \quad (i,j,k \text{ が } 1 \to 3 \to 2 \text{ の順、奇置換}) \\
&= 0 \quad (\text{上記以外}) \\
\epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\
\epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \\
\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k &= \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \\
\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \\
&= (x_i\boldsymbol{e}_i) \times (y_j\boldsymbol{e}_j) \\
&= x_i y_j \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \\
z_k &= x_i y_j \epsilon_{ijk} \\
& \quad (\text{これは、} z_k = x_i y_j - x_j y_i [\text{no sum}] \text{ であることが分かる})
\end{aligned}$$

よって、

$$\int_v \boldsymbol{x} \times \rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} dv = \int_v \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{g} dv + \int_v (\epsilon_{ijk} T_{ij} \boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{x} \times \mathrm{div}\boldsymbol{T})\, dv$$

$$\int_v \boldsymbol{x} \times \underline{\left(\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} - \rho \boldsymbol{g} - \mathrm{div}\boldsymbol{T}\right)} dv = \int_v \epsilon_{ijk} T_{ij} \boldsymbol{e}_k dv$$

上式の左辺は Cauchy の第一運動法則を適用すると 0 になる。したがって、

$$\begin{aligned}
\int_v \epsilon_{ijk} T_{ij} \boldsymbol{e}_k dv &= 0 \\
\epsilon_{ijk} T_{ij} &= 0 \qquad (55)
\end{aligned}$$

上式が成立するのは、

$$T_{ij} = T_{ji} \qquad (56)$$

すなわち、

$$\boldsymbol{T}^T = \boldsymbol{T} \qquad (57)$$

でなくてはならない。よって Cauchy の応力は対称であり、独立な成分は 6 個となる。
これは Cauchy の第二運動法則とよばれる。

9　非圧縮性の式

流体に非圧縮性の条件を仮定すれば、物質点 $\boldsymbol{X}$ の質量密度は時間に依存せず一定であるから、

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} = 0 \qquad (58)$$

これを連続の式に適用すれは、

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{59}$$

(Lagrange 表示)

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \rho\right) = 0 \tag{60}$$

(Eular 表示)

さらに、単一流体、もしくは空間的に流体の密度が一定の場合、

$$\rho = \text{const.} \tag{61}$$

であるから、非圧縮性の条件は常に満たされる。このとき Eular 表示の連続の式は左辺の項がすべて 0 となり常に満たされる。したがって Lagrange 表示連続の式のみを考慮すればよい。

10　流体の構成式

応力 $\boldsymbol{T}$ は、

$$\boldsymbol{T} = f(J, \boldsymbol{L}) \tag{62}$$

のように書くことができる（構成式)。$\boldsymbol{L}$ は速度勾配テンソルである。
また基準配置からの体積変化率つまりヤコビアンと密度は、

$$\frac{\rho_0}{\rho} = J$$

の関係があるので構成式はヤコビアンでなく現在の時刻での密度の関数とすることができる。つまり、

$$\boldsymbol{T} = f(\rho, \boldsymbol{L}) \tag{63}$$

流体の速度は一様、つまり速度勾配が 0 である場合の応力 $\tilde{\boldsymbol{T}}$ を考える。
$\boldsymbol{L} = 0$ であるから、

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = f(\rho) \tag{64}$$

物質客観性の原理から $\boldsymbol{Q}$ を任意の対称テンソルとすると、

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{T}}^* &= \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}^T \\ &= f(\rho^*) \\ &= f(\rho) \\ &= \tilde{\boldsymbol{T}}\end{aligned} \tag{65}$$

任意の対称テンソル $\boldsymbol{Q}$ による回転に対して不変なテンソルは単位テンソル $\boldsymbol{I}$ の定数倍に限られる。
よってこの場合の応力 $\tilde{\boldsymbol{T}}$ は、

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = -p(\rho)\boldsymbol{I} \tag{66}$$

と書ける。このように流体の速度が一様であるときの応力 $\overline{\boldsymbol{T}}$ を静水圧応力、p を静水圧と呼ぶ。

応力を決定する関数 f からこの静水圧応力 $\overline{\boldsymbol{T}}$ を除いた関数を新たに f と定義すると、

$$\boldsymbol{T} = -p(\rho)\boldsymbol{I} + f(\rho, \boldsymbol{L}) \tag{67}$$

となる。
f は流体の速度が一様、つまり速度勾配が 0 であるときの応力を応力 $\boldsymbol{T}$ から除いたものなので、

$$f(\rho, 0) = 0 \tag{68}$$

を満たさなければならない。

常に $f = 0$ が成り立つ、つまり

$$\boldsymbol{T} = -p(\rho)\boldsymbol{I} \tag{69}$$

である場合、理想流体という。
非圧縮性流体の場合は、$f \neq 0$ であり、f は理想流体からのずれの応力を表すので f は過剰応力と呼ばれる。
一般的に過剰応力は粘性による応力を表している。

速度勾配テンソル $\boldsymbol{L}$ の対称成分を $\boldsymbol{D}$、反対称成分を $\boldsymbol{W}$ とすると、

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W} \tag{70}$$

となる。$\boldsymbol{D}$ は変形速度テンソル、$\boldsymbol{W}$ はスピンテンソルと呼ばれる。
$\boldsymbol{W}$ は剛体回転を表しており応力に関係しない。つまり構成式は変形速度テンソル $\boldsymbol{D}$ のみで表すことができる。
物質客観性の原理より、関数 f は任意の直交テンソル $\boldsymbol{Q}$ とその時間微分で任意の反対称テンソルとなる $\dot{\boldsymbol{Q}}$ に対して、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^* &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^T \\
&= -p(\rho)\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}f(\rho, \boldsymbol{L})\boldsymbol{Q}^T \\
&= -p(\rho)\boldsymbol{I} + f(\rho, \boldsymbol{L}^*) \\
&= -p(\rho)\boldsymbol{I} + f(\rho, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}^T + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T)
\end{aligned} \tag{71}$$

を満たさなければならない。
$\boldsymbol{Q}$、$\dot{\boldsymbol{Q}}$ が任意であったことから、ここで、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{I} \\
\dot{\boldsymbol{Q}} &= -(\boldsymbol{L})_a \quad (\boldsymbol{L}\ \text{の反対称成分にマイナスしたもの}) \\
&= -\boldsymbol{W} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^T\right)
\end{aligned} \tag{72}$$

とすると、

$$\begin{aligned}f(\rho, \boldsymbol{L}) &= f(\rho, \boldsymbol{L} - (\boldsymbol{L})_a) \\ &= f(\rho, (\boldsymbol{L})_s) \quad (\mathrm{s} : \mathrm{symmetric}) \\ &= f(\rho, \boldsymbol{D}) \end{aligned} \tag{73}$$

であるから、

$$\boldsymbol{T} = -p(\rho)\boldsymbol{I} + f(\rho, \boldsymbol{D}) \tag{74}$$

となり、過剰応力 f はひずみ速度勾配テンソル $\boldsymbol{D}$ の関数となる。

【非決定応力】
非圧縮性の条件など物体に内部束縛が存在する場合、物質点の運動すなわち $\boldsymbol{F}$ の履歴からは決定することができない応力 $\overline{\boldsymbol{T}}$ を加える。
$\overline{\boldsymbol{T}}$ は非決定応力と呼ばれる。
非決定応力は仕事をしないので、

$$\overline{\boldsymbol{T}} : \boldsymbol{D} = \mathrm{tr}\left(\overline{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{D}\right) = 0 \tag{75}$$

代表的な内部拘束はスカラー値テンソル関数、

$$\gamma(\boldsymbol{F}) = 0 \tag{76}$$

のように表される。
例えば非圧縮の拘束条件は、

$$\gamma(\boldsymbol{F}) = \mathrm{det}\boldsymbol{F} - 1 = J - 1 = 0 \tag{77}$$

非圧縮性の制約条件が課された場合に単位テンソルの定数倍で表される応力は仕事をしない。
よって非決定応力 $\overline{\boldsymbol{T}}$ は、

$$\overline{\boldsymbol{T}} = -p\boldsymbol{I} \tag{78}$$

のように表すことができる。p は不定静水圧と呼ばれる。

11 Stokes 流体

過剰応力が密度に依存しないような流体を Stokes 流体 (Stokesian fluid) と呼び、その構成式は、

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + f(\boldsymbol{D}) \tag{79}$$

物質客観性の原理により関数 f は、

$$\boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{D})\boldsymbol{Q}^T = f(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T) \tag{80}$$

を満たさなければならない。つまり f は等方テンソル関数となるから、表示定理により ϕ_i を $\boldsymbol{D}$ の主不変量のスカラー関数として、

$$f(\boldsymbol{D}) = \phi_0 \boldsymbol{I} + \phi_1 \boldsymbol{D} + \phi_2 \boldsymbol{D}^2 \tag{81}$$

と表すことができる。
上式を過剰応力とする流体は Reiner-Rivlin 流体とも呼ばれる。
上式第 3 項は外力条件が急激に変化する場合に影響を持つことが知られているが、一般的に強い非線形性を示すような流体においてもほぼ無視できるほど小さいことが分かっている。

12　Newton 流体

過剰応力 $f(\boldsymbol{D})$ が $\boldsymbol{D}$ に関して線形同次であるような流体を Newton 流体という。

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \lambda\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{D}) \\ \phi_1 &= 2\mu \\ \phi_2 &= 0 \end{aligned}$$

とおくと、

$$f(\boldsymbol{D}) = \lambda\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} \tag{82}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= -p\boldsymbol{I} + \lambda\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} && (83) \\ &= -p\boldsymbol{I} + \lambda\,(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} && (84) \end{aligned}$$

ここで μ はせん断粘性率 (shear viscosity)、λ は第二粘性率 (second viscosity) と呼ばれる。

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \lambda\,(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}) + 2\mu\boldsymbol{D} \tag{85}$$

上式を $\boldsymbol{D}$ の偏差成分 $\tilde{\boldsymbol{D}}$、

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{D}} &= \boldsymbol{D} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{I} && (86) \\ &= \boldsymbol{D} - \frac{1}{3}(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{I} && (87) \end{aligned}$$

についてみる。すなわち、

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{3}(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{D}} \tag{88}$$

を代入すると、

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\tilde{\boldsymbol{D}} \tag{89}$$

$$= -p\boldsymbol{I} + \kappa\,(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\tilde{\boldsymbol{D}} \tag{90}$$

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{91}$$

κ は体積粘性率 (bulk viscosity) と呼ぶ。
多くの流体では κ は非常に小さいことが知られている。そこで $\kappa = 0$ とする Stokes の近似を用いると、圧縮性流体の構成式は次のようになる。

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\tilde{\boldsymbol{D}} \tag{92}$$

$$= -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} - \frac{2}{3}\mu\,(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{I} \tag{93}$$

さらに流体に非圧縮性を仮定すると、

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{94}$$

を満たすので、非圧縮性の Newton 流体の構成式は、

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} \tag{95}$$

13　Navier-Stokes の方程式

Newton 流体の構成式

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \lambda\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} \tag{96}$$

をオイラー座標系で記述された Cauchy の第一運動法則

$$\rho\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \rho\,(\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\,\boldsymbol{v} = \rho\boldsymbol{g} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{T} \tag{97}$$

に代入して、

$$\rho\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \rho\,(\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}})\,\boldsymbol{v} = \rho\boldsymbol{g} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \{-p\boldsymbol{I} + \lambda\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}\} \tag{98}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (-p\boldsymbol{I}) &= -\frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k \cdot (p\delta_{ji}\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i) \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_k}(\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j)\,\delta_{ji}\boldsymbol{e}_i \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_k}\delta_{kj}\delta_{ji}\boldsymbol{e}_i \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \\
&= -\nabla_{\boldsymbol{x}} p
\end{aligned}
$$

を代入すると、

$$
\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \rho\,(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})\,\boldsymbol{v} = \rho\boldsymbol{g} - \nabla_x p + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \{\lambda\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}\} \tag{99}
$$

ここで粘性係数 μ、第二粘性係数 λ が流体中で一定とした場合を考える。

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}_i\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}(\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_k)\,\boldsymbol{e}_i \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}(\delta_{kl})\,\boldsymbol{e}_i \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i \\
&= \nabla_{\boldsymbol{x}}^2\boldsymbol{v} && (100) \\
\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{v} \otimes \nabla_{\boldsymbol{x}}) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}_i\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k v_k\right) \\
&= \nabla_{\boldsymbol{x}}\,(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}) && (101) \\
\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{I} &= \nabla_{\boldsymbol{x}}\,(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}) && (102) \\
& \quad (\mathrm{tr}\boldsymbol{D} = \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} \text{ を用いた})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{D} &= \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\right) \\
&= \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v} \otimes \nabla_{\boldsymbol{x}} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{v}\right) \\
&\quad (\boldsymbol{L} = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} \text{ を用いた}) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{x}}\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{103}
$$

(102) 式、(103) 式を (99) 式に代入すると、

$$
\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \rho\left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{v} = \rho \boldsymbol{g} - \nabla_{\boldsymbol{x}} p + \mu \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{v} + (\mu + \lambda)\nabla_{\boldsymbol{x}}\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) \tag{104}
$$

$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ を代入して、

$$
\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \rho\left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{v} = \rho \boldsymbol{g} - \nabla_{\boldsymbol{x}} p + \mu \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{v} + \left(\kappa + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla_{\boldsymbol{x}}\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) \tag{105}
$$

となる。
ここで Stokes の仮定

$$
\kappa = 0 \tag{106}
$$

が成り立つ場合、

$$
\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \rho\left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{v} = \rho \boldsymbol{g} - \nabla_{\boldsymbol{x}} p + \mu \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\mu\nabla_{\boldsymbol{x}}\left(\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}\right) \tag{107}
$$

さらに流体に非圧縮性が成り立つ場合、

$$
\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{108}
$$

を代入して、

$$
\rho \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \rho\left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{v} = \rho \boldsymbol{g} - \nabla_{\boldsymbol{x}} p + \mu \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{v} \tag{109}
$$

or

$$
\rho \dot{\boldsymbol{v}} - \mu \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{x}} p = \rho \boldsymbol{g} \tag{110}
$$

以上、非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式が導出できた。

14 まとめ

流体力学の基礎も触れながら、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を導出した。

15 参考文献

[1] Nobuyuki Umetani, "Continum Mechanics for Fluid"

[2] Nobuyuki Umetani, "Fluid Governing Equation"