

[Experimental] Droplet Dispersion over RANS

ryujimiya

2021 年 05 月 07 日

1 はじめに

咳の飛沫のシミュレーションが行われている。
もっとも簡単なモデルとして乱流のなかを 1 つの滴が飛んでいく様子を求めたい。

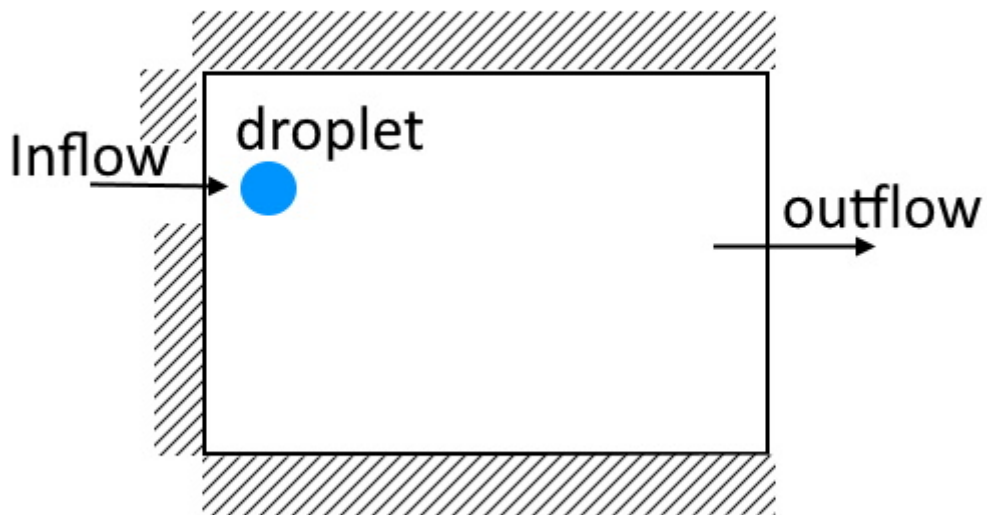


図 1 簡単なモデル

2 支配方程式

飛沫の支配方程式は、咳による空気の乱流の方程式と、滴の質点の運動方程式がある。

2.1 空気の乱流方程式

$\mathbf{u}$: 速度、 P を圧力とする。質量の方程式は、

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

乱流の方程式としては RANS 方程式がある。

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \left\{ (\mu + \mu_t)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right\} - \nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \rho \kappa \mathbf{I} \right) \quad (2)$$

ここに κ : 乱流運動エネルギー (turbulent kinetic energy)、 ϵ : 消散率 (dissipation of turbulent energy) であり、RNG k-epsilon モデルでは次式を満たす。

$$\frac{\partial(\rho \kappa)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \kappa \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\alpha_\kappa \mu_{eff} \nabla \kappa) + G_\kappa - \rho \epsilon \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \epsilon \mathbf{u}) = & \nabla \cdot (\alpha_\epsilon \mu_{eff} \nabla \epsilon) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{\kappa} G_\kappa - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{\kappa} \\ & - \frac{\eta(1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta\eta^3} \frac{\epsilon}{\kappa} G_\kappa \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \quad (5)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{\kappa^2}{\epsilon} \quad (6)$$

$$(7)$$

$$C_\mu = 0.0845$$

$$\alpha_\kappa = \alpha_\epsilon = 1.39$$

$$C_{1\epsilon} = 1.42, C_{2\epsilon} = 1.68$$

$$G_\kappa = 2\mu_t S_{ij}^2 \quad (8)$$

$$\eta = \frac{\kappa}{\epsilon} \sqrt{2S_{ij}^2} \quad (9)$$

$$\eta_0 = 4.377, \beta = 0.012$$

2.2 滴 (droplet) の運動方程式

滴、saliva droplets が計算領域に分散する (dispersion) 過程を求めるフェーズである。各時間ステップにおける独立した droplet の速度、質量と位置を計算する。

saliva micro-droplet 軌跡 (trajectory) に対する方程式は、重力、Stokes drag、added-mass force、圧力変化の効果を検討する。

$$m_p \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_P$$

$$= (\rho_p - \rho_f)V_p \mathbf{g} + \frac{3}{4}C_D \frac{\rho_f m_p}{\rho_p 2R_p} |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) + \frac{\rho_p V_p}{2} \frac{\partial (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)}{\partial t} + V_p \nabla P \quad (10)$$

$\mathbf{u}_p$: saliva particle の速度ベクトル

$\mathbf{u}_f$: fluid(すなわち空気) の速度ベクトル

ρ_f : 空気の密度

ρ_p : particle の密度

V_p, R_p, m_p : saliva particle の体積、半径、質量

C_D : drag coefficient

droplet の Reynolds number に依存し、

$$C_D = \begin{cases} 24/Re_p & (Re_p < 1) \\ (24/Re_p)(1 + 0.5Re_p^{0.687}) & (1 \leq Re_p \leq 1000) \\ 0.44 & (Re_p > 1000) \end{cases} \quad (11)$$

$$Re_p = \frac{2R_p |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| \rho_f}{\mu_f} \quad (12)$$

μ_f : fluid viscosity

最終的な表現は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} \left(1 + \frac{\rho_f}{2\rho_p} \right) &= \frac{3}{4}C_D 2R_p \frac{\rho_f}{\rho_p} |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p| (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p) \\ &+ \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p} \right) \mathbf{g} \\ &+ \frac{\rho_f}{2\rho_p} \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \\ &+ \frac{\nabla P}{\rho_p} \end{aligned} \quad (13)$$

Rk4 を用いて解いてみる。

3 まとめ

咳の飛沫のシミュレーション検討中。

4 参考文献

[1] Hongying Li, Fong Yew Leong, George Xu, Zhengwei Ge, Chang Wei Kang, and Keng Hui Lim, "Dispersion of evaporating cough droplets in tropical outdoor environment", *Phys. Fluids* 32, 113301 (2020), Published Online: 03 November 2020

[2] Mohammad-Reza Pendar and José Carlos Páscoa, "Numerical modeling of the distribution of virus carrying saliva droplets during sneeze and cough", *Phys. Fluids* 32, 083305 (2020), Published Online: 11 August 2020