SH Wave(Shear Horizontal wave) Elastic Plate Waveguides Discontinuity Problem Using Absorbing Boundary Conditions(ABC)

ryujimiya

2020 年 08 月 18 日

1　はじめに

SH wave(Shear Horizontal wave) 弾性波プレート導波路 (elastic plate waveguides)(2 次元) の不連続問題（discontinuity problem, transmission problem 伝達問題, scattering problem 散乱問題）について吸収境界条件 (ABC, Absorbing Bounadry Conditions) を用いた周波数領域 FEM 定式化を行う。

2　弾性波プレート導波路, SH wave の不連続問題

「Frequency Domain FEM Formulations for SH Wave (Shear Horizontal Wave) Elastic Plate Waveguides - Eigenvalue Problem and Discontinuity Problem -」で行った定式化を用いる。

x 軸に関して対称とし、対称面を mid-plane と呼ぶことにする。2 ポート不連続問題を考え、ポートは $\pm x$ 方向半無限導波路に接続されている問題を考える。
入出力ポートの境界に ABC(Absorbing Boundary Conditions) を課すことにする。
また、領域内部に入射面 (incident plane)、ポート参照面 (reference port1, port2) を設ける。
導波路内部を Ω、導波路の外部を Ω_{ex} としたとき、$\partial\Omega$(Ω の境界) 上では、
Ω_{ex}:真空とすると、

$$\boldsymbol{\sigma n} = 0 \quad \text{(stress free surface)} \tag{1}$$

$$\sigma_{zn} = 0 \rightarrow \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_y \text{のとき、} \sigma_{zy} = 0 \tag{2}$$

mid-plane では、

$$\sigma_{zy} = 0 \tag{3}$$

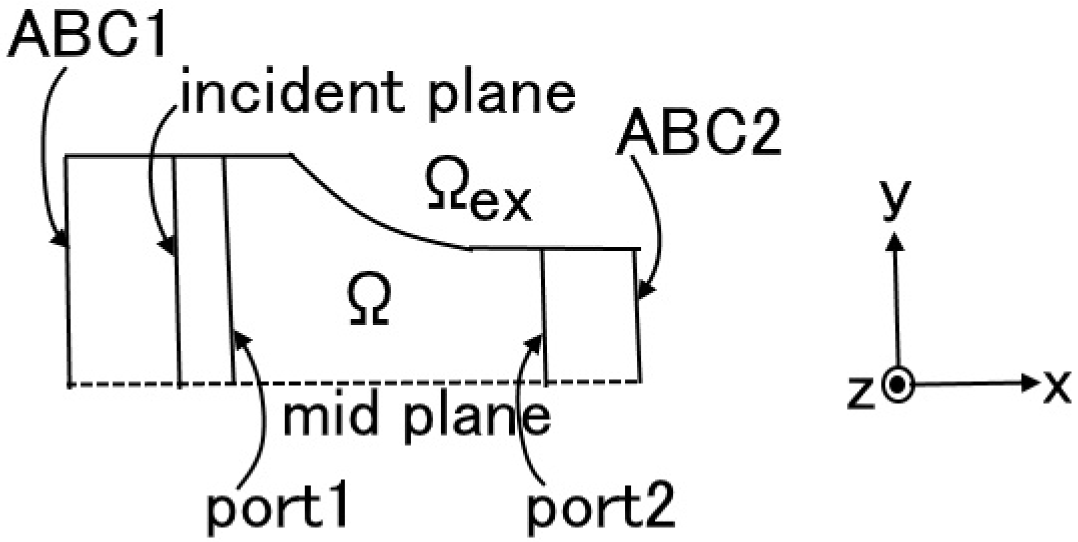
ABC1
incident plane
ABC2
Ω_{ex}
Ω
mid plane
port1
port2
y
x
z

図１　導波路不連続問題

SH wave の支配方程式は、

$$\mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \rho \omega^2 u_z = 0 \tag{4}$$

いま領域を三角形要素で分割し、δu_z, u_z を次のように補間する。

$$\delta u_z = \{N\}^T \{\delta u_z\} \tag{5}$$

$$u_z = \{N\}^T \{u_z\} \tag{6}$$

このとき、SH wave の弱形式の δu_z に関する変分から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \{u_z\} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \{u_z\} & \\ -\rho \omega^2 \{N\}\{N\}^T \{u_z\} dV = \int_S \{N\} \sigma_{zn} dS & \quad (7) \\ \sigma_{zn} = n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} & \quad (8) \end{aligned}$$

$$[K_{zz}]\{u_z\} = \{F_z\} \tag{9}$$

$$[K_{zz}] = \int_V \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}}{\partial x} + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}}{\partial y} dV \tag{10}$$

$$[M_{zz}] = \int_V \rho\{N\}\{N\}^T dV \tag{11}$$

$$\{F_z\} = \int_S \{N\}\sigma_{zn} dS \tag{12}$$

$$\sigma_{zn} = n_x\sigma_{zx} + n_y\sigma_{zy} \tag{13}$$

3　吸収境界条件 (ABC,Absorbing Boundary Conditions)

不連続問題の境界項

$$\{F_z\} = \int_S \{N\}\sigma_{zn} dS \tag{14}$$

$$\sigma_{zn} = n_x\sigma_{zx} + n_y\sigma_{zy} \tag{15}$$

境界が $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$ のときは、$n_x = 1$, $n_y = 0$ より、

$$\sigma_{zn} = \sigma_{zx} = \mu\frac{\partial u_z}{\partial x} \tag{16}$$

吸収境界条件 (ABC, Absorbing Boundary Conditions) は次式となる。

$$\sigma_{zx} = -\rho V_s v_z \tag{17}$$

ここに

$$v_z = \dot{u}_z \tag{18}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{19}$$

これは Clayton and Engquist の ABC に対応するもので、地震波 (seismic wave) の S wave の ABC である。

$e^{j\omega t}$ の正弦波を考えると $v_z = j\omega u_z$ より (17) 式の ABC は

$$\sigma_{zx} = -j\omega\rho V_s u_z \tag{20}$$

ABC を境界項 (14) 式に代入すると (ρ など媒質定数は const とする)、

$$\begin{aligned}\{F_z\} &= \int_S \{N\}\Big[-\rho V_s v_z\Big] dS \\ &= -j\omega\rho V_s \int_S \{N\} u_z dS \end{aligned} \tag{21}$$

(21) 式を離散化すると、

$$\begin{aligned}\{F_z\} &= -j\omega\rho V_s \int_S \{N\}\{N\}^T dS \{u_z\} \\ &= [B_{zz}]\{u_z\} \end{aligned} \tag{22}$$

$$[B_{zz}] = -j\omega\rho V_s \int_S \{N\}\{N\}^T dS \tag{23}$$

(9) 式を領域内 0 と ABC 境界上 1 に分けて書くと、

$$[A]\begin{bmatrix}\{u_z\}_0 \\ \{u_z\}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \{F_z\}\end{bmatrix} \tag{24}$$

(24) 式に (22) 式を代入すると、

$$[A]\begin{bmatrix}\{u_z\}_0\\ \{u_z\}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ [B_{zz}]\{u_z\}_1\end{bmatrix} \tag{25}$$

したがって、

$$\begin{bmatrix}[A_{00}] & [A_{01}]\\ [A_{10}] & [A_{11}]-[B_{zz}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{u_z\}_0\\ \{u_z\}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{26}$$

4　SH wave の固有モードの算出

入射波の指定および反射、透過係数を算出する際、SH wave の固有モードを用いるが、これについては、「Frequency Domain FEM Formulations for SH Wave (Shear Horizontal Wave) Elastic Plate Waveguides -　Eigenvalue Problem and Discontinuity Problem -」で述べた定式化を用いる。

5　入射項の評価

入射面を S とし、x 軸に垂直とする。
入射面の $-x$ 側の領域を V_-、$+x$ 側の領域を V_+ とする。
入射面 S を $-x$ 側に少し離した面を S_-、$+x$ 側に少し離した面を S_+ とする。
(26) 式は、

$$\begin{bmatrix} [A_{00}] & [A_{01}] \\ [A_{10}] & [A_{11}] - [B_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_z\}_0 \\ \{u_z\}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_z\}_S \\ 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\{F_z\}_S = \int_S \{N\} \sigma_{zx} dS \tag{28}$$

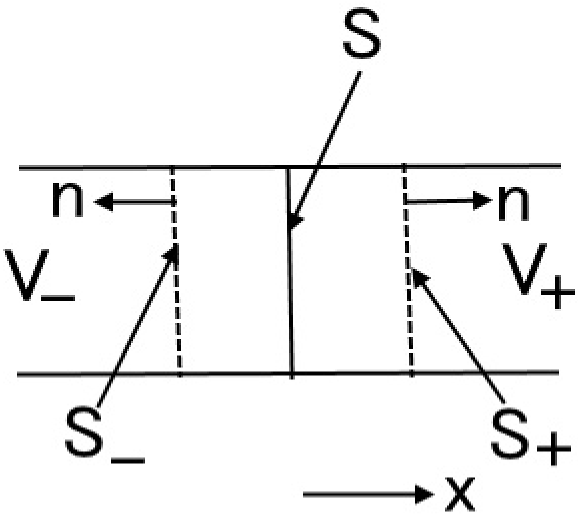

図 2　入射面

入射項 (28) 式を計算する。
入射面 S における入射界を $\boldsymbol{\sigma}_{inc}$、散乱界を $\boldsymbol{\sigma}_{scat}$ とする。

$$\begin{aligned}\{F_z\}_S &= \int_S \{N\}\sigma_{zx}dS \\ &= -\int_{S_-}\{N\}\sigma_{zx}\Big|_{S_-}dS + \int_{S_+}\{N\}\sigma_{zx}\Big|_{S_+}dS \\ &\qquad (S_-\text{の法線ベクトル } \boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_x \text{より } S_-\text{の項はマイナスが付く})\end{aligned} \tag{29}$$

ここで、

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zxinc} + \sigma_{zxscat} \tag{30}$$

より、

$$\begin{aligned}\{F_z\}_S &= -\int_{S_-}\{N\}(\sigma_{zxinc}+\sigma_{zxscat})\Big|_{S_-}dS \\ &\quad + \int_{S_+}\{N\}(\sigma_{zxinc}+\sigma_{zxscat})\Big|_{S_+}dS \\ &= \int_S \{N\}\left(-\sigma_{zxinc}\Big|_{S_-} + \sigma_{zxinc}\Big|_{S_+}\right)dS\end{aligned} \tag{31}$$

ただし、散乱波の連続性

$$\sigma_{zxscat}\Big|_{S_-} = \sigma_{zxscat}\Big|_{S_+} \tag{32}$$

を用いた。
また、
$\sigma_{zxinc}\Big|_{S_-}$: S_- から V_+ へ向かう波
$\sigma_{zxinc}\Big|_{S_+}$: S_+ から V_- へ向かう波

$$\sigma_{zxinc}\Big|_{S_+} = -\sigma_{zxinc}\Big|_{S_-} \tag{33}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\{F_z\}_S &= -2\int_S \{N\}\sigma_{zxinc}\Big|_{S_-}dS \\ &= -2\int_S \{N\}\{N\}^T dS\{\sigma_{zxinc}\}\end{aligned} \tag{34}$$

ここで、入射波として基本モードを考えると、

$$\sigma_{zxinc} = -j\beta_0\mu u_{zinc} \tag{35}$$

であるから、

$$\{F_z\}_S = -2\int_S \{N\}\{N\}^T dS(-j\beta_0\mu)\{u_{zinc}\} \tag{36}$$

固有モード展開
$m=0$(基本モード) のみとする。

$$u_z(x,y) = (a_0 e^{-j\beta_0 x} + b_0 e^{j\beta_0 x})\omega f_{z0}(y) \tag{37}$$
$$\hat{\sigma}_{zx}(x,y) = (a_0 e^{-j\beta_0 x} - b_0 e^{j\beta_0 x})\hat{g}_{zx0}(y) \tag{38}$$

規格化条件

$$\int_y f_{z0}\hat{g}_{zx0}dy = 1 \tag{39}$$

なお、

$$\hat{\sigma}_{zx} = j\sigma_{zx} \tag{40}$$
$$\hat{g}_{zx0} = jg_{zx0} \tag{41}$$

入射波は、

$$\begin{aligned} u_{zinc} &= a_0 e^{-j\beta_0 x}\omega f_{z0} \\ &= \omega f_{zx0} \qquad (42) \\ &\quad (\text{入射波振幅 } a_0 = 1\text{、入射面の } x = 0 \text{ とした}) \qquad (43) \end{aligned}$$

$\{F_z\}$(36) 式は、

$$\{F_z\}_S = -2\int_S \{N\}\{N\}^T dS(-j\beta_0\mu\omega)\{f_{z0}\} \tag{44}$$

これで入射項が定まったので、(27) 式を解くことができる。

6　反射係数、透過係数

ポート上の振幅は次式で計算できる。
ポート 1 の入射振幅 $a_0|_{port1}=1$、ポート 2 の入射振幅 $a_0|_{port2}=0$ で計算した場合、反射係数、透過係数となる。

$$\begin{aligned} b_0 &= -a_0 + \int_y \frac{1}{\omega}\hat{u}_z\hat{g}_{zx0}dy \\ &= -a_0 + \{g_{zx0}\}^T\frac{1}{\omega}\int_y \{N\}\{N\}^T dy\{u_z\} \end{aligned} \tag{45}$$

7　まとめ

SH wave 弾性波プレート導波路の不連続問題について ABC を用いた周波数領域 FEM 定式化を行った。

8　参考文献

[1] Helene Barucq, Julien Diaz, Henri Calandra, Emmanuel Agullo, George Bosilca, "Anisotropic elastic waves or how to model the subsurface more realistically", GdT INRIA Magique3D, 24 November 2014