Frequency Domain FEM Formulations for SH Wave (Shear Horizontal Wave) Elastic Plate Waveguides – Eigenvalue Problem and Discontinuity Problem –

ryujimiya

2020 年 08 月 03 日

1　はじめに

「Frequency Domain FEM Formulations for Lamb Wave Elastic Plate Waveguides – Eigenvalue Problem and Discontinuity Problem –」では、Lamb wave の弾性波プレート導波路を扱った。
本書では SH wave(Shear Horizontal wave) 弾性波プレート導波路の固有値問題 (eigenvalue problem) と不連続問題（discontinuity problem, transmission problem 伝達問題, scattering problem 散乱問題）の周波数領域 FEM 定式化を行う。
定式化は文献 [1] の Lamb wave の定式化の手順を SH wave に応用したものになっている。

2　弾性波プレート導波路 (elastic plate waveguides), SH wave の不連続問題 (1)

x 軸に関して対称とし、対称面を mid-plane と呼ぶことにする。2 ポート不連続問題を考え、ポートは $\pm x$ 方向半無限導波路に接続されているとする。
導波路内部を Ω、導波路の外部を Ω_{ex} としたとき、$\partial\Omega$(Ω の境界) 上では、
Ω_{ex}:真空とすると、

$$\boldsymbol{\sigma n} = 0 \quad \text{(stress free surface)} \tag{1}$$

$$\rightarrow \sigma_{zn} = n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} = 0 \tag{2}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_y \text{ のとき、} \sigma_{zy} = 0 \tag{3}$$

mid-plane では、

$$\sigma_{zy} = 0 \tag{4}$$

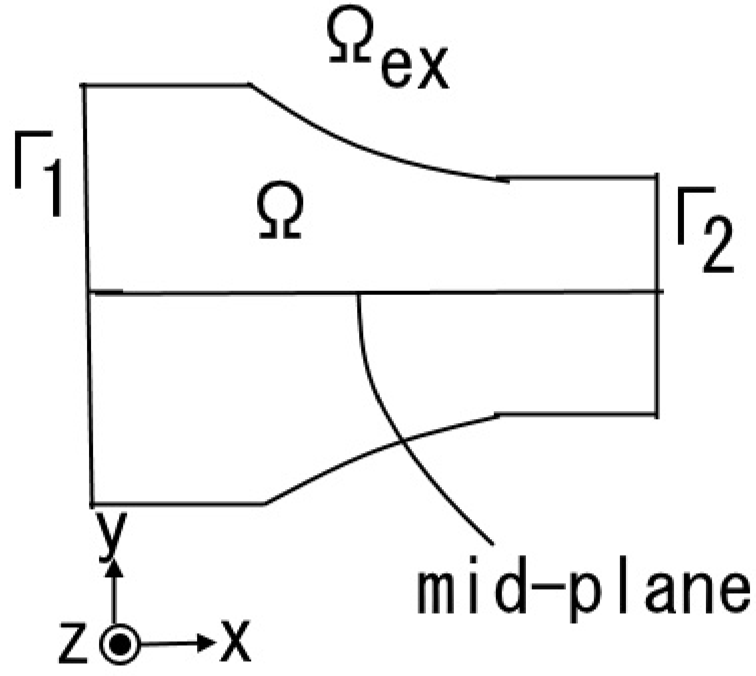

図１　導波路不連続問題

SH wave の支配方程式は (「Frequency Domain FEM Formulations for Lamb Wave Elastic Plate Waveguides – Eigenvalue Problem and Discontinuity Problem –」の導出結果を示すと)

$$\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_z+\rho\omega^2 u_z=0 \tag{5}$$

$$u_x=u_y=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=0 \tag{6}$$

応力テンソルは、

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\\&=0\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}&=\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}\\&=0\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}&=\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\\&=0\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}&=\sigma_{yx}\\&=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\\&=0\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}&=\sigma_{zx}\\&=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\\&=\mu\frac{\partial u_z}{\partial x}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}&=\sigma_{zy}\\&=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\\&=\mu\frac{\partial u_z}{\partial y}\end{aligned} \tag{12}$$

支配方程式を次のように変形する。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial u_z}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial u_z}{\partial y}\right]+\rho\omega^2 u_z=0 \tag{13}$$

応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ の成分 σ_{zx}、σ_{zy} を使うと、応力を用いた波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\rho\omega^2 u_z=0 \tag{14}$$

応力 $\boldsymbol{\sigma}$ を用いた波動方程式の弱形式を求める。
(14) 式に δu_z を掛けて積分する。

$$\int_V \delta u_z \left[\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \rho\omega^2 u_z\right] dV = 0 \tag{15}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\delta u_z \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}\right) &= \delta u_z \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k} \quad (k = x, y \text{ の sum}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}(\delta u_z \sigma_{zk}) - \frac{\partial \delta u_z}{\partial x_k}\sigma_{zk} \\
&= \nabla \cdot \Big[(\delta u_z \sigma_{zk})\boldsymbol{e}_k\Big] - \frac{\partial \delta u_z}{\partial x}\sigma_{zx} - \frac{\partial \delta u_z}{\partial y}\sigma_{zy} \qquad (16)
\end{aligned}$$

これらを (15) 式に適用すると、次の弱形式を得る。

$$\int_V \frac{\partial \delta u_z}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial y}\sigma_{zy} - \omega^2 \rho \delta u_z u_z dV = 0 \tag{17}$$

ただし、自然境界項を 0 と置いた式である。
自然境界項は、

$$\begin{aligned}
\int_V -\nabla \cdot \Big[(\delta u_z \sigma_{zk})\boldsymbol{e}_k\Big] dV &= \int_S -\boldsymbol{n} \cdot \Big[(\delta u_z \sigma_{zk})\boldsymbol{e}_k dS \\
&= \int_S -\delta u_z \Big[n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy}\Big] dS \\
&= \int_S -\delta u_z \sigma_{zn} dS \qquad (18) \\
\sigma_{zn} &= n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} \qquad (19)
\end{aligned}$$

自然境界条件項を復活させると (17) 式は、

$$\int_V \frac{\partial \delta u_z}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial y}\sigma_{zy} - \omega^2 \rho \delta u_z u_z dV = \int_S \delta u_z \sigma_{zn} dS \tag{20}$$

弱形式 (20) 式に $\boldsymbol{\sigma}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\int_V \mu \frac{\partial \delta u_z}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial \delta u_z}{\partial y}\frac{\partial u_z}{\partial y} - -\omega^2 \rho \delta u_z u_z dV \\
= \int_S \delta u_z \sigma_{zn} dS \qquad (21)
\end{aligned}$$

いま領域を三角形要素で分割し、δu_z, u_z を次のように補間する。

$$\begin{aligned}
\delta u_z &= \{N\}^T\{\delta u_z\} \qquad (22) \\
u_z &= \{N\}^T\{u_z\} \qquad (23)
\end{aligned}$$

(22) 式、(23) 式を弱形式 (21) 式に代入し、$\{\delta u_z\}$ の変分をとると、

$$\int_V \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \{u_z\} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \{u_z\} \\ -\omega^2 \rho \{N\}\{N\}^T \{u_z\} dV = \int_S \{N\} \sigma_{zn} dS \tag{24}$$

$$[K_{zz}]\{u_z\} - \omega^2 [M_{zz}]\{u_z\} = \{F_z\} \tag{25}$$

$$[K_{zz}] = \int_V \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dV \tag{26}$$

$$[M_{zz}] = \int_V \rho \{N\}\{N\}^T dV \tag{27}$$

$$\{F_z\} = \int_S \{N\} \sigma_{zn} dS \{F_y\} \tag{28}$$

$$\sigma_{zn} = n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} \tag{29}$$

ポート境界が $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$ のときは、$n_x = 1, n_y = 0$ より、

$$\sigma_{zn} = \sigma_{zx} \tag{30}$$

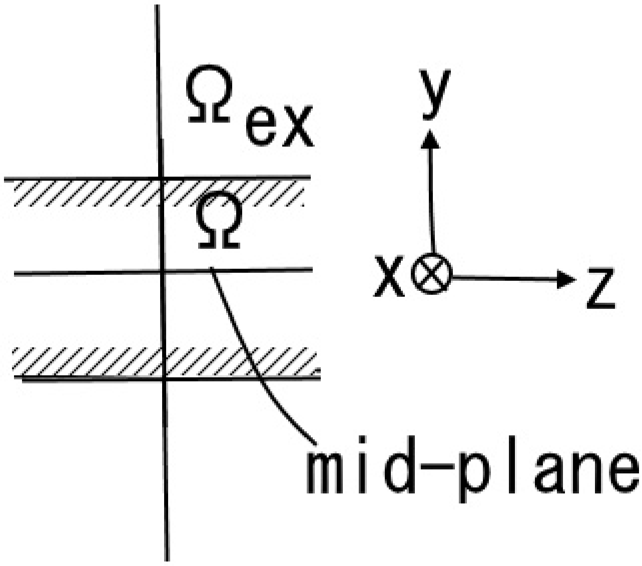

図 2　導波路固有値問題

3　SH wave 弾性導波路の 1D 固有値問題

1D 導波路として、

(a) x 方向伝搬 $e^{-j\beta x}$ (β:伝搬定数)

(b) z 方向は一様な媒質

(c) y 方向は y=0 を境に上下対称な媒質分布

Ω:内部領域（elastic plate）、Ω:外部領域（真空）である。

1D 弱形式は、(24) 式で、

$$\frac{\partial\{N\}}{\partial x} = \left(\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right)^* = (-j\beta\{N\})^* = j\beta\{N\}$$
$$\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} = -j\beta\{N\}^T \tag{31}$$

とおく。

$$\int_V \mu\beta^2\{N\}\{N\}^T\{u_z\} + \mu\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_z\} - \omega^2\rho\{N\}\{N\}^T\{u_z\}dV = 0 \tag{32}$$

$$[K_{zz}]\{u_z\} - \omega^2[M_{zz}]\{u_z\} = 0 \tag{33}$$
$$[K_{zz}] = \int_V \mu\beta^2\{N\}\{N\}^T + \mu\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}dV \tag{34}$$
$$[M_{zz}] = \int_V \rho\{N\}\{N\}^T dV \tag{35}$$

(33) 式は β を与えて ω を求める固有値問題である。

ω を与えて β を求める固有値問題に変形する。

$$\beta^2[R_{zz}]\{u_z\} + [T_{zz}]\{u_z\} - \omega^2[M_{zz}]\{u_z\} = 0 \tag{36}$$

$$[R_{zz}] = \int_V \mu\{N\}\{N\}^T dV \tag{37}$$

$$[T_{zz}] = \int_V \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} dV \tag{38}$$

$$[M_{zz}] = \int_V \rho\{N\}\{N\}^T dV \tag{39}$$

or

$$[A]\{u_z\} - \beta^2[B]\{u_z\} = 0 \tag{40}$$

$$[A] = [T_{zz}] - \omega^2[M_{zz}] \tag{41}$$

$$[B] = -[R_{zz}] \tag{42}$$

(40) 式は ω を与えて β を求める固有値問題となっている。

(40) 式で固有ベクトル $\{u_z\}$ が求まると、固有モードの σ_{zx}, σ_{zy} は次式で求まる。

$$\begin{aligned}\sigma_{zx} &= \mu\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ &= -j\beta\mu u_z \\ &= -j\beta\mu\{N\}^T\{u_z\} \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zy} &= \mu\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ &= \mu\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_z\} \end{aligned} \tag{44}$$

4　固有モードの規格化

複素ポインティングベクトル $\boldsymbol{P}$ は、

$$\boldsymbol{P} = j\omega\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{u}^* \tag{45}$$

成分表示 (SH wave)

$$\begin{aligned}P_x &= j\omega(\sigma_{xx}u_x^* + \sigma_{yx}u_y^* + \sigma_{zx}u_z^*) \\ &= j\omega\sigma_{zx}u_z^* \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}P_y &= j\omega(\sigma_{xy}u_x^* + \sigma_{yy}u_y^* + \sigma_{zy}u_z^*) \\ &= j\omega\sigma_{zy}u_z^* \end{aligned} \tag{47}$$

x 方向に伝搬する SH wave を仮定しているので P_x を用いる。

$$P_x = j\omega\sigma_{zx}u_z^* \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zx} &= \mu\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ &= -j\beta\mu u_z\end{aligned} \tag{49}$$

u_z, σ_{zx} を次式で規格化する。
規格化されたモード関数をそれぞれ f_z, g_{zx} とすると、

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{\omega}du_z \qquad u_z = \frac{\omega}{d}f_z \\ g_{zx} &= d\sigma_{zx} \qquad \sigma_{zx} = \frac{1}{d}g_{zx}\end{aligned} \tag{50}$$

ここに、d:規格化定数である。
パワーを求める。

$$\begin{aligned}\int_y P_x dx &= j\omega\int_y \sigma_{zx}u_z^* dy \\ &= j\omega\int_y \frac{1}{d}g_{zx}\left(\frac{\omega}{d}f_z\right)^* dy \\ &= j\frac{\omega^2}{|d|^2}\int_y g_{zx}f_z^* dy\end{aligned} \tag{51}$$

規格化条件

$$j\int_y g_{zx}f_z^* dy = \frac{\beta^*}{|\beta|} \tag{52}$$

とする。
(103) 式に代入すると、

$$\int_y P_x dy = \frac{\omega^2}{|d|^2}\frac{\beta^*}{|\beta|} \tag{53}$$

$$\tag{54}$$

or

$$|d|^2\int_y P_x dy = \omega^2\frac{\beta^*}{|\beta|} \tag{55}$$

規格化定数 d を求めると、

$$d = \sqrt{\frac{\omega^2\beta^*}{|\beta|\int_y P_x dy}} \tag{56}$$

ここで複素ポインティングベクトルの積分は次式で計算する。

$$\begin{aligned}\int_y P_x dy &= j\omega \int_y \sigma_{zx} u_z^* dy \\ &= j\omega \int_y (-j\beta\mu u_z) u_z^* dy \\ &= j\omega \int_y -j\beta\mu \{u_z^*\}^T \{N\}\{N\}^T \{u_z\} dy \end{aligned} \tag{57}$$

実数モード関数の導入

規格化条件 (52) 式：

$$j \int_y g_{zx} f_z^* dy = \frac{\beta^*}{|\beta|} \qquad [(52)\text{ 式}]$$

伝搬モードのとき

$$j \int_y g_{zx} f_z^* dy = 1 \tag{58}$$

$$\rightarrow \int_y (j g_{zx}) f_z^* dy = 1$$

$$\rightarrow \int_y \hat{g}_{zx} f_z^* dy = 1 \tag{59}$$

$$\hat{g}_{zx} = j g_{zx} \tag{60}$$

$\hat{g}_{zx}$ と f_z^* は同位相であるから実数として扱うことができて、規格化条件は次式になる。

$$\int_y \hat{g}_{zx} f_z dy = 1 \tag{61}$$

5 弾性波プレート導波路 (elastic plate waveguides), SH wave の不連続問題 (2)

SH wave の固有モードが求められたので、不連続問題の定式化の後半部を記す。

固有モード展開

$$u_z(x,y) = \sum_m (a_m e^{-j\beta_m x} + b_m e^{j\beta_m x}) \omega f_{zm}(y) \tag{62}$$

$$\hat{\sigma}_{zx}(x,y) = \sum_m (a_m e^{-j\beta_m x} - b_m e^{j\beta_m x}) \hat{g}_{zxm}(y) \tag{63}$$

規格化条件 (61) 式

$$\int_y f_{zm} \hat{g}_{zxm} dy = 1 \tag{64}$$

なお、

$$\hat{\sigma}_{zx} = j\sigma_{zx} \tag{65}$$
$$\hat{g}_{zxm} = jg_{zxm} \tag{66}$$

u_z(62) 式を使う。

$$\begin{aligned}
&\int_y \frac{1}{\omega} u_z \hat{g}_{zxm'} dy \\
&= (a_{m'} e^{-j\beta_{m'} x} + b_{m'} e^{j\beta_{m'} x}) \int_y f_{zm'} \hat{g}_{zxm'} dy \\
&\quad (m = m' \text{以外のモードの項はモードの直交条件より 0 とした}) \\
&= (a_{m'} e^{-j\beta_{m'} x} + b_{m'} e^{j\beta_{m'} x}) && (67) \\
&\quad (\text{規格化条件より}) && (68)
\end{aligned}$$

$b_{m'}$ を求めると、

$$b_{m'} = -a_{m'} e^{-2j\beta_{m'} x} + e^{-j\beta_{m'} x} \int_y \frac{1}{\omega} u_z \hat{g}_{zxm'} dy \tag{69}$$

$\hat{\sigma}_{zx}$(63) 式にb_m を代入する。

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{zx}(x, y) &= \sum_m \Big[a_m e^{-j\beta_m x} - \Big\{ - a_m e^{-2j\beta_m x} \\
&\qquad + e^{-j\beta_m x} \int_y \frac{1}{\omega} u_z \hat{g}_{zxm} dy \Big\} e^{j\beta_m x} \Big] \hat{g}_{zxm} \\
&= \sum_m \Big[2a_m e^{-j\beta_m x} \\
&\qquad - \int_y \frac{1}{\omega} u_z \hat{g}_{zxm} dy \Big] \hat{g}_{yxm}
\end{aligned} \tag{70}$$

入射モードを $m = 0$ のみとし、上式を離散化すると、

$$\begin{aligned}
\{\hat{\sigma}_{zx}\} &= 2a_0 \{\hat{g}_{zx0}\} \\
&\qquad - \sum_m \int_y \frac{1}{\omega} \hat{g}_{zxm} \{N\}^T \{u_z\} dy \{\hat{g}_{zxm}\}
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\{\hat{\sigma}_{zx}\} = 2a_0\{\hat{g}_{zx0}\} - [F_{zz}]\{u_z\} \tag{72}$$

$$[F_{zz}] = \sum_m \{\hat{g}_{zxm}\}\frac{1}{\omega}\int_y \hat{g}_{zxm}\{N\}^T dy \tag{73}$$

ここで、

$$\hat{\sigma}_{zx} = j\sigma_{zx} \tag{74}$$

であるから、

$$\begin{aligned} j\{\sigma_{zx}\} &= 2a_0\{\hat{g}_{zx0}\} - [F_{zz}]\{u_z\} \\ \to \{\sigma_{zx}\} &= \frac{1}{j}2a_0\{\hat{g}_{zx0}\} - \frac{1}{j}[F_{zz}]\{u_z\} \end{aligned} \tag{75}$$

よって、

$$\{\sigma_{zx}\} = \frac{1}{j}2a_0\{\hat{g}_{zx0}\} - [\hat{F}_{zz}]\{u_z\} \tag{76}$$

$$[\hat{F}_{zz}] = \frac{1}{j}[F_{zz}] \tag{77}$$

(25) 式は次のように書ける。ポートの法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$ のとき、

$$[A_{zz}]\{u_z\} = \{F_z\} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}\{F_z\} &= \int_y \{N\}\sigma_{zx} dy \\ &= \int_y \{N\}\{N\}^T\{\sigma_{zx}\} dy \\ &= [B]\{\sigma_{zx}\}\end{aligned} \tag{79}$$

※ $\hat{\sigma}_{zx}$ にしないことに注意。

$$[B] = \int_y \{N\}\{N\}^T dy \tag{80}$$

領域内を 0、ポート上を 1 で表す。

$$[A]\begin{bmatrix}\{u_z\}_0 \\ \{u_z\}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ [B]\{\sigma_{zx}\}_1\end{bmatrix} \tag{81}$$

(81) 式と (76) 式を組み合わせると、最終的な解くべき方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} [A] & & [0] \\ & & -[B] \\ [0] & [\hat{F}_{zz}] & [1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_z\}_0 \\ \{u_z\}_1 \\ \{\sigma_{zx}\}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{j} 2a_0 \{\hat{g}_{zx0}\}_1 \end{bmatrix} \tag{82}$$

ポート上の振幅は次式で計算できる。
ポート 1 の入射振幅 $a_0|_{port1} = 1$、ポート 2 の入射振幅 $a_0|_{port2} = 0$ で計算した場合、反射係数、透過係数となる。

$$\begin{aligned} b_m &= -a_m + \int_y \frac{1}{\omega} u_z \hat{g}_{zxm} dy \\ &= -a_m + \{\hat{g}_{zxm}\}^T \frac{1}{\omega} \int_y \{N\}\{N\}^T dy \{u_z\} \end{aligned} \tag{83}$$

ここに u_z はポート上のローカル座標系の向き (法線ベクトルの向き) を基準とした成分を想定している。
全体座標系の u_z を用いる場合は、ポートの法線ベクトル $\boldsymbol{n} = n_x \boldsymbol{e}_x \quad (n_x = \pm 1)$ とすると、

$$b_m = -a_m + (-n_x) \left[\{\hat{g}_{zxm}\}^T \frac{1}{\omega} \int_y \{N\}\{N\}^T dy \{u_z\} \right] \tag{84}$$

ポート 1 のとき、$n_x = -1$

ポート 2 のとき、$n_x = 1$

6　まとめ

SH wave 弾性波プレート導波路の固有値問題と不連続問題の周波数領域 FEM 定式化を行った。

7　参考文献

[1] Masanori Koshiba, Shoji Karakida, and Michio Suzuki, ”Finite-Element Analysis of Lamb Wave Scattering in an Elastic Plate Waveguide”, IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, vol. su-31, no. 1, January 1984