

Time Domain FEM Formulations for Lamb Wave Elastic Plate Waveguide Discontinuity Problem Using Perfectly Matched Layers(PML)

ryujimiya

2020年09月07日

1 はじめに

時間領域有限要素法 (TDFEM) の完全整合層 (Perfectly Matched Layers, PML) としては、Jiao-Jin-Michielsen-Riley が導出したものがある。Jiao-Jin-Michielsen-Riley は Maxwell の方程式の波動方程式に対する PML 定式化を行っている (「Perfectly Matched Layers (PML) for Time Domain FEM」を参照)。彼らは 3次元問題として定式化しているが、1方向 PML についても結果が記されている。

本書では Lamb wave 弾性波導波路 (elastic waveguides) について Jiao-Jin-Michielsen-Riley の定式化と等価な 2次元の PML の定式化を行う。

解きたい導波路が x 方向のみからなるので、x 方向 PML のみを定式化する。

(必要ならば x 方向 PML、y 方向 PML、x,y 両方向 PML の 3つの PML を別々に定式化する必要がある)

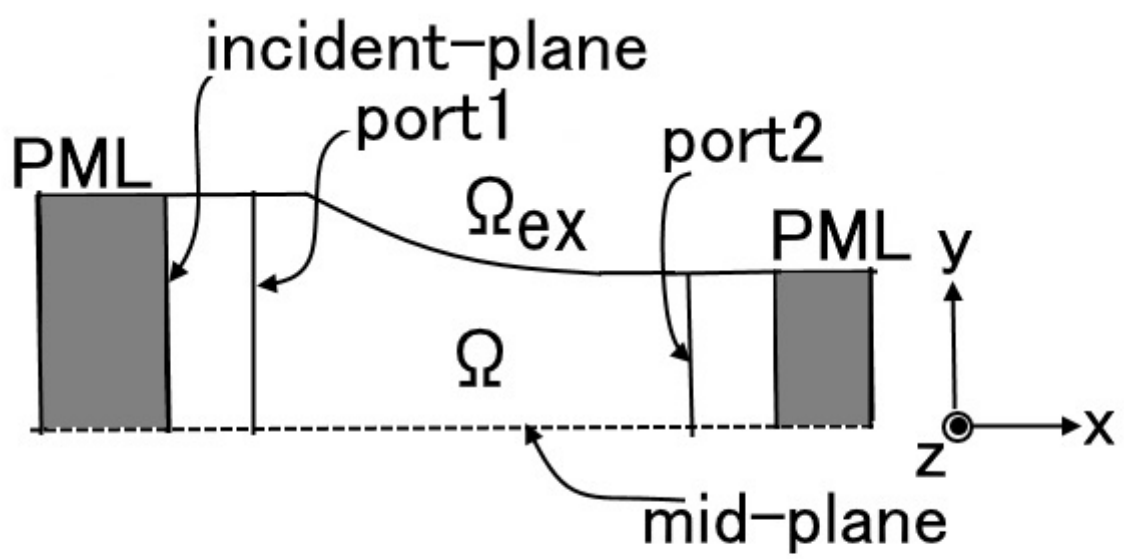


图1 PML

2 周波数領域 FEM の PML

Perfectly Matched Layers(PML) 領域の支配方程式は、complex coordinate stretch を使って導く。
complex coordinate stretch は、次の座標置き換えである。

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \quad (1)$$

(2)

$e^{j\omega t}$ の正弦波を考えていることに注意すると (t の符号に注意)、complex stretch function s_i ($i = 1, 2$ は x,y に対応) は、

$$s_i(x_i) = A_i(x_i) \left[1 - j \frac{D_i(x_i)}{\omega} \right] \quad (3)$$

ここに、

$D_i \geq 0$: damping factor、PML 内部の伝搬波を減衰させる。

$A_i > 0$: scaling factor、 $A_i > 1$ のとき stretching、 $0 < A_i < 1$ のとき compressing

PML でない解析領域では、 $D_i = 0$, $A_i = 1$

$$A_i(x_i) = 1 \quad (\text{内部領域})$$

$$= 1 + (A_{i0} - 1) \left(\frac{x_i}{\delta} \right)^n \quad (\text{PML 内}) \quad (4)$$

$$D_i(x_i) = 0 \quad (\text{内部領域})$$

$$= D_{i0} \left(\frac{x_i}{\delta} \right)^n \quad (\text{PML 内}) \quad (5)$$

δ : PML 厚さ (PML thickness)

x_i : PML 開始位置からの距離

n : PML 次数

A_{i0} : scaling factor 最大値

D_{i0} : damping factor 最大値

$$D_{i0} = \frac{V_{max}(n+1)}{2\delta} \log \left(\frac{1}{R} \right) \quad (6)$$

V_{max} : 波の最高スピード (highest wave speed), V_{max} として、P 波の速度、

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (7)$$

を採用する。

R : PML の終端の反射係数

計算では、 $n = 2$ を用いた。

complex coordinate stretch を行った Lamb wave の周波数領域支配方程式 (応力 σ を用いた波動方程式) は、

$$s_y \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + s_x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + s_x s_y \rho \omega^2 u_x = 0 \quad (8)$$

$$s_x \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + s_y \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + s_x s_y \rho \omega^2 u_y = 0 \quad (9)$$

ただし、両辺を $s_x s_y$ 倍していることに注意。

応力テンソル σ は周波数領域では次式となる。

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{s_x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{1}{s_y} \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (10)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \frac{1}{s_x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{1}{s_y} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (11)$$

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{s_y} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{1}{s_x} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (12)$$

(8) 式、(9) 式に対応する周波数領域の弱形式は、

$$\begin{aligned} \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{s_y}{s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ - s_x s_y \rho \omega^2 \{N\} u_x dV = \int_S \{N\} \sigma_{xn} dS \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ + \mu \frac{s_y}{s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ - s_x s_y \rho \omega^2 \{N\} u_y dV = \int_S \{N\} \sigma_{yn} dS \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma_{dn} = n_x s_y \sigma_{dx} + n_y s_x \sigma_{dy} \quad (d = x, y) \quad (15)$$

3 時間領域 FEM の PML – X 方向 PML

X 方向 PML のときの周波数領域の弱形式は $s_y = 1$ とおいて、

$$\begin{aligned} \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{1}{s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu s_x \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ - s_x \rho \omega^2 \{N\} u_x dV = \int_S \{N\} \sigma_{xn} dS \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \int_V (\lambda + 2\mu) s_x \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ + \mu \frac{1}{s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ - s_x \rho \omega^2 \{N\} u_y dV = \int_S \{N\} \sigma_{yn} dS \end{aligned} \quad (17)$$

● $\frac{1}{s_x} u$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_x} u &= \frac{1}{A_x \left(1 + \frac{D_x}{j\omega}\right)} u \\ &= \frac{1}{A_x} \left(1 - \frac{1}{1 + j\omega \frac{1}{D_x}}\right) u \end{aligned} \quad (18)$$

変換公式

$$\frac{1}{1 + j\omega X} \leftrightarrow \frac{1}{X} e^{-\frac{t}{X}} \bar{u}(t) \quad (19)$$

$$1 \leftrightarrow \delta(t) \quad (20)$$

を使用すると

$$\frac{1}{s_x} u \Rightarrow \frac{1}{A_x} (\delta(t) - D_x e^{-D_x t} \bar{u}(t)) \star u(t) \quad (21)$$

ここで、 $\bar{u}(t)$: unit step function、 \star : temporal convolution である。

または、

$$\frac{1}{s_x} u \Rightarrow \frac{1}{A_x} (u - \psi_x) \quad (22)$$

$$\psi_x = D_x e^{-D_x t} \bar{u}(t) \star u(t) \quad (23)$$

● $s_x u$

$$s_x u = A_x \left(1 + \frac{D_x}{j\omega}\right) u \quad (24)$$

$$\Rightarrow A_x \left(u + D_x \int u dt\right) \quad (25)$$

または、

$$s_x u \Rightarrow A_x (u + w_x) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} w_x &= D_x \int u dt \\ &\rightarrow \frac{\partial w_x}{\partial t} = D_x u \end{aligned} \quad (27)$$

● $-\omega^2 s_x u$

$$\begin{aligned} -\omega^2 s_x u &= -\omega^2 A_x \left(1 + \frac{D_x}{j\omega} \right) u \\ &= A_x (-\omega^2 u + j\omega D_x u) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Rightarrow A_x (\ddot{u} + D_x \dot{u}) \quad (29)$$

以上から (16) 式、(17) 式に対応する時間領域の弱形式は、

$$\begin{aligned} \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{1}{A_x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_{xx}}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial y} A_x \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial w_{xx}}{\partial y} \right) \\ + \rho \{N\} A_x (\ddot{u}_x + D_x \dot{u}_x) dV = \int_S \{N\} \sigma_{xn} dS \end{aligned} \quad (30)$$

$$\psi_{xx} = D_x e^{-D_x t} \bar{u}(t) \star u_x(t) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} w_{xx} &= D_x \int u_x dt \\ &\rightarrow \frac{\partial w_{xx}}{\partial t} = D_x u_x \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \{N\}}{\partial y} A_x \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial w_{yx}}{\partial y} \right) + \lambda \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{1}{A_x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_{yx}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ + \rho \{N\} A_x (\ddot{u}_y + D_x \dot{u}_y) dV = \int_S \{N\} \sigma_{yn} dS \end{aligned} \quad (33)$$

$$\psi_{yx} = D_x e^{-D_x t} \bar{u}(t) \star u_y(t) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} w_{yx} &= D_x \int u_y dt \\ &\rightarrow \frac{\partial w_{yx}}{\partial t} = D_x u_y \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
& [K_x^1]\{u_x\} - [K_x^1]\{\psi_{xx}\} + [K_{xy}^1]\{u_y\} \\
& \quad + [K_y^1]\{u_x\} + [K_y^1]\{w_{xx}\} \\
& \quad + [M_1^1]\{\ddot{u}_x\} + [M_2^1]\{\dot{u}_x\} = 0
\end{aligned} \tag{36}$$

$$[K_x^1] = \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{1}{A_x} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} dV \tag{37}$$

$$[K_{xy}^1] = \int_V \lambda \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} dV \tag{38}$$

$$[K_y^1] = \int_V \lambda \frac{\partial\{N\}}{\partial y} A_x \frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} dV \tag{39}$$

$$[M_1^1] = \int_V \rho\{N\} A_x \{N\}^T dV \tag{40}$$

$$[M_2^1] = \int_V \rho\{N\} A_x D_x \{N\}^T dV \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
& [K_y^2]\{u_y\} + [K_y^2]\{w_{yx}\} + [K_{xy}^2]\{u_x\} \\
& \quad + [K_x^2]\{u_y\} - [K_x^2]\{\psi_{yx}\} \\
& \quad + [M_1^2]\{\ddot{u}_y\} + [M_2^2]\{\dot{u}_y\} = 0
\end{aligned} \tag{42}$$

$$[K_y^2] = \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial\{N\}}{\partial y} A_x \frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} dV \tag{43}$$

$$[K_{xy}^2] = \int_V \lambda \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} dV \tag{44}$$

$$[K_x^2] = \int_V \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{1}{A_x} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} dV \tag{45}$$

$$[M_1^2] = \int_V \rho\{N\} A_x \{N\}^T dV \tag{46}$$

$$[M_2^2] = \int_V \rho\{N\} A_x D_x \{N\}^T dV \tag{47}$$

4 $\psi_{d\xi}$ と $w_{d\xi}$ の計算方法

定式化には u 以外に $\psi_{d\xi}$ と $w_{d\xi}$ が現れるが、以下の関係式を使って逐次更新する。

Δt は時間刻み幅、 $n+1$ はこれから解こうとしている時刻でその値は未知、 n 、 $n-1$ はすでに計算した時刻でその値は既知である。

$\psi_{d\xi}$ と $w_{d\xi}$ のどちらも漸化式を使えば2つ前の値を使って1つ前の値を求めることができる。

$\psi_{d\xi}$ と $w_{d\xi}$ は隣接する要素間で不連続であるため、要素毎に要素内節点値を計算する必要がある。

● $\psi_{d\xi}$

$$\psi_{d\xi} = D_\xi e^{-D_\xi t} \bar{u}(t) \star u_d(t) \tag{48}$$

次の関係式が導ける。

$$\psi_{d\xi}^n = e^{-D_\xi \Delta t} \psi_{d\xi}^{n-1} + (1 - e^{-D_\xi \Delta t}) u_d^n \quad (49)$$

● $w_{d\xi}$

$$\frac{\partial w_{d\xi}}{\partial t} = D_\xi u_d \quad (50)$$

次の関係式が導ける。

$$w_{d\xi}^n = w_{d\xi}^{n-1} + D_\xi \Delta t u_d^n \quad (51)$$

5 Newmark β 法

(36) 式と (42) 式を連立すると、次のように書ける。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{t+\Delta t} \quad (52)$$

上式に Newmark β 法を適用すると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}^{t+\Delta t} \\ &= \mathbf{F}^{t+\Delta t} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}^t + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}^t + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}^t \right] \\ &+ \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}^t + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}^t + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^t \right] \end{aligned} \quad (53)$$

ただし、

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_y\} \end{bmatrix} \quad (54)$$

である。

なお、 $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$ を用いた。

応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の算出は、(10) 式–(12) 式の周波数両機の式を時間領域に変換した式が必要となる。

時間領域の応力の式は PML 領域では s_x, s_y を含むため convolution が現れることとなる。

内部領域 (物理領域) のみの応力だけ必要なら $s_x = 1, s_y = 1$ なので、その時刻の \mathbf{u} だけで計算可能である。

6 まとめ

Lamb wave 弾性波導波路の時間領域 FEM の PML 定式化を行った。

PML の定式化にはバリエーションがあるが、Jiao-Jin-Michielsen-Riley の PML 定式化を用いた。

7 参考文献

- [1] Dan Jiao, Jian-Ming Jin, Eric Michielssen, and Douglas J. Riley, "Time-domain finite-element simulation of three-dimensional scattering and radiation problems using perfectly matched layers." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* vol. 51, no. 2, February 2003

- [2] Hisham Assi, "Time-domain modeling of elastic and acoustic wave propagation in unbounded media, with application to metamaterials", A thesis submitted in conformity with the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, Graduate Department of Electrical and Computer Engineering, collaborative program with the Institute of Biomaterial and Biomedical Engineering, University of Toronto, 2016

- [3] Dimitri Komatitsch and Roland Martin, "An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation", *Geophysics*, vol.72, No.5, September-October 2007