

Lamb Wave Elastic Plate Waveguides Discontinuity Problem Using Absorbing Boundary Conditions(ABC)

ryujimiya

2020年08月13日

1 はじめに

弾性波プレート導波路 (elastic plate waveguides)(2次元)の不連続問題 (discontinuity problem, transmission problem 伝達問題, scattering problem 散乱問題) について吸収境界条件 (ABC, Absorbing Boundary Conditions) を用いた周波数領域 FEM 定式化を行う。

2 弾性波プレート導波路, Lamé wave の不連続問題

「Frequency Domain FEM Formulations for Lamb Wave Elastic Plate Waveguides – Eigenvalue Problem and Discontinuity Problem –」で行った定式化を用いる。

x 軸に関して対称とし、対称面を mid-plane と呼ぶことにする。2 ポート不連続問題を考え、ポートは $\pm x$ 方向半無限導波路に接続されている問題を考える。

入出力ポートの境界に ABC(Absorbing Boundary Conditions) を課すことにする。

また、領域内部に入射面 (incident plane)、ポート参照面 (reference port1, port2) を設ける。

導波路内部を Ω 、導波路の外部を Ω_{ex} としたとき、 $\partial\Omega$ (Ω の境界) 上では、

Ω_{ex} :真空とすると、

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = 0 \quad (\text{stress free surface}) \quad (1)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_y \text{ のとき、 } \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0 \quad (2)$$

mid-plane では、

$$u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (3)$$

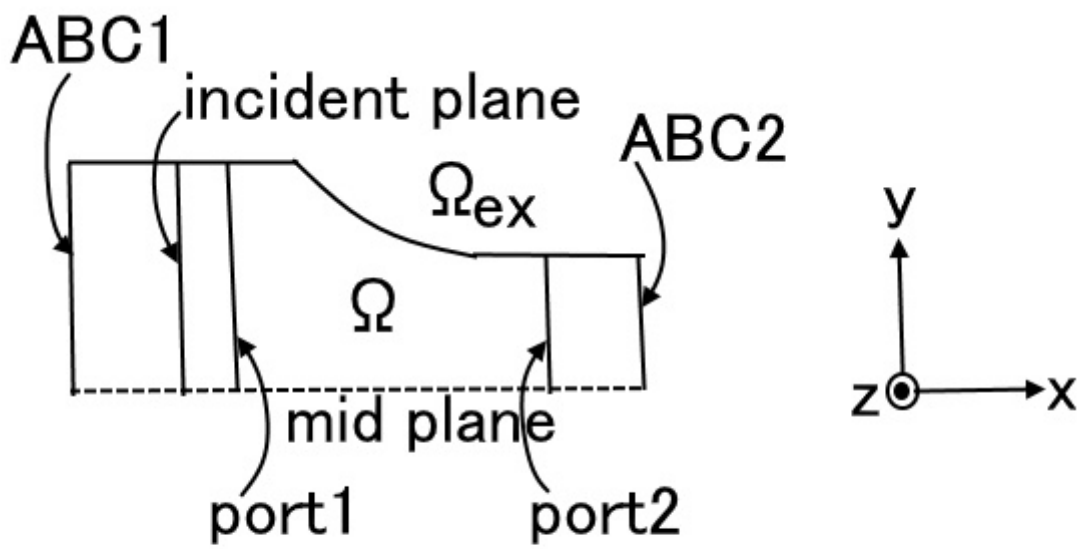


图 1 导波路不连续问题

Lamb wave の支配方程式は、

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y} + \rho\omega^2 u_x = 0 \quad (4)$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial y\partial x} + \rho\omega^2 u_y = 0 \quad (5)$$

いま領域を三角形要素で分割し、 $\delta u_x, \delta u_y, u_x, u_y$ を次のように補間する。

$$\begin{aligned} \delta u_x &= \{N\}^T \{\delta u_x\} \\ \delta u_y &= \{N\}^T \{\delta u_y\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_x &= \{N\}^T \{u_x\} \\ u_y &= \{N\}^T \{u_y\} \end{aligned} \quad (7)$$

このとき、Lamb wave の弱形式の $\delta u_x, \delta u_y$ に関する変分から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} \{u_x\} + \lambda \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} \{u_y\} \\ + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} \{u_y\} + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} \{u_x\} \\ - \rho\omega^2 \{N\} \{N\}^T \{u_x\} dV = \int_S \{N\} \sigma_{xn} dS \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} \{u_y\} + \lambda \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} \{u_x\} \\ + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} \{u_y\} + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} \{u_x\} \\ - \rho\omega^2 \{N\} \{N\}^T \{u_y\} dV = \int_S \{N\} \sigma_{yn} dS \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sigma_{dn} = n_x \sigma_{dx} + n_y \sigma_{dy}, \quad d = x, y \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_y\} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_{xx}] & 0 \\ 0 & [M_{yy}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_y\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[K_{xx}] = \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}}{\partial x} + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}}{\partial y} dV \quad (12)$$

$$[K_{xy}] = \int_V \lambda \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}}{\partial y} + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}}{\partial x} dV \quad (13)$$

$$[K_{yx}] = \int_V \lambda \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}}{\partial x} + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}}{\partial y} dV \quad (14)$$

$$[K_{yy}] = \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial\{N\}}{\partial y} \frac{\partial\{N\}}{\partial y} + \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial x} \frac{\partial\{N\}}{\partial x} dV \quad (15)$$

$$[M_{xx}] = \int_V \rho\{N\}\{N\}^T dV \quad (16)$$

$$[M_{yy}] = \int_V \rho\{N\}\{N\}^T dV \quad (17)$$

$$\{F_x\} = \int_S \{N\} \sigma_{xn} dS \quad (18)$$

$$\{F_y\} = \int_S \{N\} \sigma_{yn} dS \quad (19)$$

$$\sigma_{dn} = n_x \sigma_{dx} + n_y \sigma_{dy} \quad d = x, y \quad (20)$$

3 吸収境界条件 (ABC, Absorbing Boundary Conditions)

不連続問題の境界項

$$\{F_x\} = \int_S \{N\} \sigma_{xn} dS \quad (21)$$

$$\{F_y\} = \int_S \{N\} \sigma_{yn} dS \quad (22)$$

$$\sigma_{dn} = n_x \sigma_{dx} + n_y \sigma_{dy} \quad d = x, y \quad (23)$$

境界が $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ のときは、 $n_x = 1, n_y = 0$ より、

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (24)$$

$$\sigma_{yn} = \sigma_{yx} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (25)$$

法線入射項にフォーカスを当てたとき、他の方向の微分は除くことができると仮定する。そうすると吸収境界条件 (ABC, Absorbing Boundary Conditions) は次式となる。

$$\sigma_{xx} = -\rho V_p v_x \quad (26)$$

$$\sigma_{yx} = -\rho V_s v_y \quad (27)$$

ここに

$$v_x = \dot{u}_x, \quad v_y = \dot{u}_y \quad (28)$$

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (29)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (30)$$

これは Clayton and Engquist の ABC に対応するものである。

この ABC は地震波 (seismic wave, P wave and S wave) の ABC であり、Lamb wave の ABC ではないが数値実験の結果 ABC を不連続部から十分な距離をとれば有効なことが分かった。

$e^{j\omega t}$ の正弦波を考えると $v_x = j\omega u_x, v_y = j\omega u_y$ より (26) 式、(27) 式の ABC は

$$\sigma_{xx} = -j\omega \rho V_p u_x \quad (31)$$

$$\sigma_{yx} = -j\omega \rho V_s u_y \quad (32)$$

ABC を境界項 (21) 式、(22) 式に代入すると (ρ など媒質定数は const とする)、

$$\begin{aligned}\{F_x\} &= \int_S \{N\} \left[-\rho V_p v_x \right] dS \\ &= -j\omega\rho V_p \int_S \{N\} u_x dS\end{aligned}\quad (33)$$

$$\begin{aligned}\{F_y\} &= \int_S \{N\} \left[-\rho V_s v_y \right] dS \\ &= -j\omega\rho V_s \int_S \{N\} u_y dS\end{aligned}\quad (34)$$

(33) 式、(34) 式を離散化すると、

$$\begin{aligned}\{F_x\} &= -j\omega\rho V_p \int_S \{N\} \{N\}^T dS \{u_x\} \\ &= [B_{xx}] \{u_x\}\end{aligned}\quad (35)$$

$$\begin{aligned}\{F_y\} &= -j\omega\rho V_s \int_S \{N\} \{N\}^T dS \{u_y\} \\ &= [B_{yy}] \{u_y\}\end{aligned}\quad (36)$$

$$[B_{xx}] = -j\omega\rho V_p \int_S \{N\} \{N\}^T dS \quad (37)$$

$$[B_{yy}] = -j\omega\rho V_s \int_S \{N\} \{N\}^T dS \quad (38)$$

(11) 式を領域内 0 と ABC 境界上 1 に分けて書くと、

$$[A] \begin{bmatrix} \{u_x\}_0 \\ \{u_y\}_0 \\ \{u_x\}_1 \\ \{u_y\}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{bmatrix} \quad (39)$$

(39) 式に (35) 式、(36) 式を代入すると、

$$[A] \begin{bmatrix} \{u_x\}_0 \\ \{u_y\}_0 \\ \{u_x\}_1 \\ \{u_y\}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ [B_{xx}] \{u_x\}_1 \\ [B_{yy}] \{u_y\}_1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} [A_{x0x0}] & [A_{x0y0}] & [A_{x0x1}] & [A_{x0y1}] \\ [A_{y0x0}] & [A_{y0y0}] & [A_{y0x1}] & [A_{y0y1}] \\ [A_{x1x0}] & [A_{x1y0}] & [A_{x1x1}] - [B_{xx}] & [A_{x1y1}] \\ [A_{y1x0}] & [A_{y1y0}] & [A_{y1x1}] & [A_{y1y1}] - [B_{yy}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_x\}_0 \\ \{u_y\}_0 \\ \{u_x\}_1 \\ \{u_y\}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

4 Lamb wave の固有モードの算出

入射波の指定および反射、透過係数を算出する際、Lamb wave の固有モードを用いるが、これについては、「Frequency Domain FEM Formulations for Lamb Wave Elastic Plate Waveguides – Eigenvalue Problem and Discontinuity Problem –」で述べた定式化を用いる。

5 入射項の評価

入射面を S とし、 x 軸に垂直とする。

入射面の $-x$ 側の領域を V_- 、 $+x$ 側の領域を V_+ とする。

入射面 S を $-x$ 側に少し離れた面を S_- 、 $+x$ 側に少し離れた面を S_+ とする。

(41) 式は、

$$\begin{bmatrix} [A_{x0x0}] & [A_{x0y0}] & [A_{x0x1}] & [A_{x0y1}] \\ [A_{y0x0}] & [A_{y0y0}] & [A_{y0x1}] & [A_{y0y1}] \\ [A_{x1x0}] & [A_{x1y0}] & [A_{x1x1}] - [B_{xx}] & [A_{x1y1}] \\ [A_{y1x0}] & [A_{y1y0}] & [A_{y1x1}] & [A_{y1y1}] - [B_{yy}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_x\}_0 \\ \{u_y\}_0 \\ \{u_x\}_1 \\ \{u_y\}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_x\}_S \\ \{F_y\}_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\{F_x\}_S = \int_S \{N\} \sigma_{xx} dS \quad (43)$$

$$\{F_y\}_S = \int_S \{N\} \sigma_{yx} dS \quad (44)$$

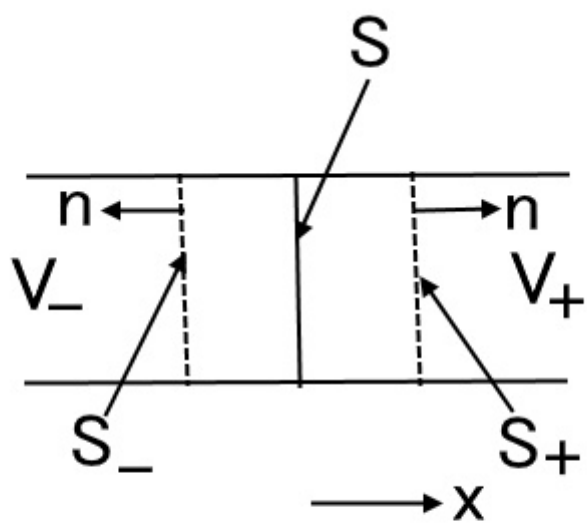


图2 入射面

入射項 (43) 式、(44) 式を計算する。

入射面 S における入射界を σ_{inc} 、散乱界を σ_{scat} とする。

(43) 式：

$$\begin{aligned} \{F_x\}_S &= \int_S \{N\} \sigma_{xx} dS \\ &= - \int_{S_-} \{N\} \sigma_{xx} \Big|_{S_-} dS + \int_{S_+} \{N\} \sigma_{xx} \Big|_{S_+} dS \end{aligned} \quad (45)$$

(S_- の法線ベクトル $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ より S_- の項はマイナスが付く)

ここで、

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xxinc} + \sigma_{xxscat} \quad (46)$$

より、

$$\begin{aligned} \{F_x\}_S &= - \int_{S_-} \{N\} (\sigma_{xxinc} + \sigma_{xxscat}) \Big|_{S_-} dS \\ &\quad + \int_{S_+} \{N\} (\sigma_{xxinc} + \sigma_{xxscat}) \Big|_{S_+} dS \\ &= \int_S \{N\} \left(-\sigma_{xxinc} \Big|_{S_-} + \sigma_{xxinc} \Big|_{S_+} \right) dS \end{aligned} \quad (47)$$

ただし、散乱波の連続性

$$\sigma_{xxscat} \Big|_{S_-} = \sigma_{xxscat} \Big|_{S_+} \quad (48)$$

を用いた。

また、

$\sigma_{xxinc} \Big|_{S_-}$: S_- から V_+ へ向かう波

$\sigma_{xxinc} \Big|_{S_+}$: S_+ から V_- へ向かう波

$$\sigma_{xxinc} \Big|_{S_+} = -\sigma_{xxinc} \Big|_{S_-} \quad (49)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \{F_x\}_S &= -2 \int_S \{N\} \sigma_{xxinc} \Big|_{S_-} dS \\ &= -2 \int_S \{N\} \{N\}^T dS \{ \sigma_{xxinc} \} \end{aligned} \quad (50)$$

(44) 式:

$$\begin{aligned} \{F_y\}_S &= \int_S \{N\} \sigma_{yx} dS \\ &= \int_S \{N\} \left(-\sigma_{yxinc} \Big|_{S_-} + \sigma_{yxinc} \Big|_{S_+} \right) dS \end{aligned} \quad (51)$$

ただし、

$$\sigma_{yx} = \sigma_{yxinc} + \sigma_{yxscat} \quad (52)$$

$$\sigma_{yxscat} \Big|_{S_-} = \sigma_{yxscat} \Big|_{S_+} \quad (53)$$

を用いた。また、

$$\sigma_{yxinc} \Big|_{S_+} = -\sigma_{yxinc} \Big|_{S_-} \quad (54)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \{F_y\}_S &= -2 \int_S \{N\} \sigma_{yxinc} \Big|_{S_-} dS \\ &= -2 \int_S \{N\} \{N\}^T dS \{\sigma_{yxinc}\} \end{aligned} \quad (55)$$

固有モード展開

$m = 0$ (基本モード)のみとする。

$$\hat{u}_y(x, y) = (a_0 e^{-j\beta_0 x} + b_0 e^{j\beta_0 x}) \omega \hat{f}_{y0}(y) \quad (56)$$

$$\sigma_{yx}(x, y) = (a_0 e^{-j\beta_0 x} - b_0 e^{j\beta_0 x}) g_{yx0}(y) \quad (57)$$

$$u_x(x, y) = (a_0 e^{-j\beta_0 x} - b_0 e^{j\beta_0 x}) \omega f_{x0}(y) \quad (58)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}(x, y) = (a_0 e^{-j\beta_0 x} + b_0 e^{j\beta_0 x}) \hat{g}_{xx0}(y) \quad (59)$$

規格化条件

$$\int_y f_{x0} \hat{g}_{xx0} + \hat{f}_{y0} g_{yx0} dy = 1 \quad (60)$$

なお、

$$\begin{aligned} \hat{u}_y &= -j u_y \\ \hat{\sigma}_{xx} &= j \sigma_{xx} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{y0} &= -j f_{y0} \\ \hat{g}_{xx0} &= j g_{xx0} \end{aligned} \quad (62)$$

入射波は、

$$\begin{aligned} \sigma_{xxinc} &= -j \hat{\sigma}_{xxinc} \\ &= -j a_0 e^{-j\beta_0 x} \hat{g}_{xx0} \\ &= -j \hat{g}_{xx0} \end{aligned} \quad (63)$$

(入射波振幅 $a_0 = 1$ 、入射面の $x = 0$ とした)

$$\begin{aligned} \sigma_{yxinc} &= a_0 e^{-j\beta_0 x} g_{yx0} \\ &= g_{yx0} \end{aligned} \quad (64)$$

($a_0 = 1$ 、 $x = 0$ とした)

$\{F_x\}$ (50) 式、 $\{F_y\}$ (55) 式は、

$$\{F_x\}_S = -2 \int_S \{N\} \{N\}^T dS (-j) \{\hat{g}_{xx0}\} \quad (65)$$

$$\{F_y\}_S = -2 \int_S \{N\} \{N\}^T dS \{g_{yx0}\} \quad (66)$$

$$(67)$$

これで入射項が定まったので、(42) 式を解くことができる。

6 反射係数、透過係数

ポート上の振幅は次式で計算できる。

ポート 1 の入射振幅 $a_0|_{port1} = 1$ 、ポート 2 の入射振幅 $a_0|_{port2} = 0$ で計算した場合、反射係数、透過係数となる。

$$\begin{aligned} b_0 &= -a_0 + \int_y f_{x0} \hat{\sigma}_{xx} + \frac{1}{\omega} \hat{u}_y g_{yx0} dy \\ &= -a_0 + \{f_{x0}\}^T \int_y \{N\} \{N\}^T dy \{\hat{\sigma}_{xx}\} \\ &\quad + \{g_{yx0}\}^T \frac{1}{\omega} \int_y \{N\} \{N\}^T dy \{\hat{u}_y\} \end{aligned} \quad (68)$$

7 まとめ

Lamb wave 弾性波プレート導波路の不連続問題について ABC を用いた周波数領域 FEM 定式化を行った。

8 参考文献

[1] Helene Barucq, Lionel Boillot, Henri Calandra and Julien Diaz, "Absorbing boundary conditions for 2D tilted transverse isotropic elastic media", ESAIM: Proceedings and Surveys, September 2014, Vol. 45, p. 400-409

[2] Helene Barucq, Julien Diaz, Henri Calandra, Emmanuel Agullo, George Bosilca, "Anisotropic elastic waves or how to model the subsurface more realistically", GdT INRIA Magique3D, 24 November 2014

[3] N. Anders Petersson and Bjorn Sjogreen, "An Energy Absorbing Far-Field Boundary Condition for the ElasticWave Equation", Communications in Computational Physics, Vol. 6, No. 3, pp. 483-508, September 2009

