Frequency Domain FEM Formulations for Lamb Wave Elastic Plate Waveguides – Eigenvalue Problem and Discontinuity Problem –

ryujimiya

2020 年 07 月 29 日

1　はじめに

弾性波プレート導波路 (2 次元) の固有値問題 (eigenvalue problem) と不連続問題（discontinuity problem, transmission problem 伝達問題, scattering problem 散乱問題）の周波数領域 FEM 定式化を行う。

2　弾性波の波動方程式 (elastic wave equations)

Cauchy の第 1 運動法則より

$$\rho \ddot{\boldsymbol{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} \tag{1}$$

or

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \tag{2}$$

ρ は密度、$\boldsymbol{u}$ は変位、$\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルである。
線形ひずみを仮定すると、ひずみテンソル $\boldsymbol{\epsilon}$ の成分は、

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{3}$$

線形弾性体の Hook's law は、

$$\begin{align} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{4} \\ &= \Big[\lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl})\Big]\epsilon_{kl} \tag{5} \\ &= \lambda \delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} \tag{6} \end{align}$$

ここに λ、μ は Lame の定数である。
(3) 式を (6) 式に代入して、

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \tag{7}$$

(7) 式を (2) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\rho \ddot{u}_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] + f_i \\
&= \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) + f_i \\
&= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + f_i
\end{aligned} \tag{8}$$

ただし、一様媒質を考え λ、μ の勾配は 0 とした。
(8) 式をベクトル表記すると、

$$\rho \ddot{\boldsymbol{u}} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \tag{9}$$

3　2D 弾性波プレート導波路 (elastic plate waveguides)

(9) 式で、$\frac{\partial}{\partial z} = 0$ とする。

$$\begin{aligned}
\rho \ddot{\boldsymbol{u}} = (\lambda + \mu) & \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right\} \boldsymbol{e}_x + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right\} \boldsymbol{e}_y \right] \\
& + \mu \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_x \boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_y \boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z \boldsymbol{e}_z \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\rho \ddot{u}_x = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_x \tag{11}$$

$$\rho \ddot{u}_y = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_y \tag{12}$$

$$\rho \ddot{u}_z = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z \tag{13}$$

角周波数 ω の波を考えると、

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_x + \rho \omega^2 u_x = 0 \tag{14}$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_y + \rho \omega^2 u_y = 0 \tag{15}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z + \rho \omega^2 u_z = 0 \tag{16}$$

(14)-(16) より (u_x, u_y) 成分と u_z 成分は独立であることが分かる。
(u_x, u_y) 成分のみの波は Lamb wave、u_z 成分のみの波は SH wave(shear horizontal wave) と呼ばれる。

shear wave の波数

$$k_s = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \tag{17}$$

波の特性は Poisson 比 ν のみに依存する。
Poisson 比は、

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{18}$$

平面応力場を仮定すると、E:Young 率、ν:Poisson 比として、

$$\sigma_{xx} = 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda'(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \tag{19}$$
$$\sigma_{yy} = 2\mu\epsilon_{yy} + \lambda'(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \tag{20}$$
$$\sigma_{zz} = 0 \tag{21}$$
$$\tau_{xy} = 2\mu\gamma_{xy} \tag{22}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \tag{23}$$

ただし、平面応力場の λ は、次の λ' に置き換える。

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \tag{24}$$

4 弾性波プレート導波路 (elastic plate waveguides), Lame wave の不連続問題 (1)

x 軸に関して対称とし、対称面を mid-plane と呼ぶことにする。2 ポート不連続問題を考え、ポートは $\pm x$ 方向半無限導波路に接続されているとする。
導波路内部を Ω、導波路の外部を Ω_{ex} としたとき、$\partial\Omega$(Ω の境界) 上では、
Ω_{ex}:真空とすると、

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{(stress free surface)} \tag{25}$$
$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_y \text{ のとき、} \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0 \tag{26}$$

mid-plane では、

$$u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \tag{27}$$

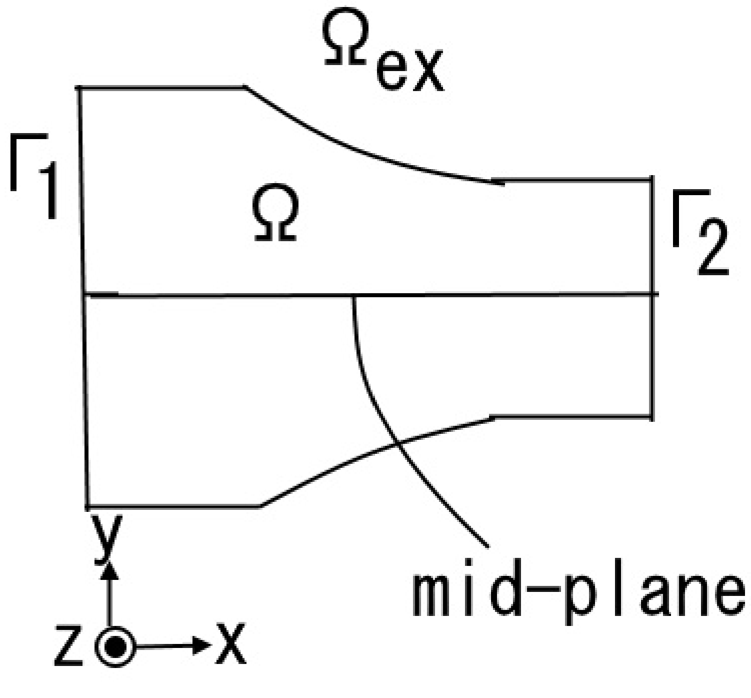

図１　導波路不連続問題

応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は (7) 式より、

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{28}$$

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{29}$$

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{30}$$

Lamb wave の支配方程式 (14) 式、(15) 式は、

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \rho\omega^2 u_x = 0 \tag{31}$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \rho\omega^2 u_y = 0 \tag{32}$$

支配方程式を次のように変形する。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_y}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu\frac{\partial u_y}{\partial x}\right] + \rho\omega^2 u_x = 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu\frac{\partial u_x}{\partial y}\right] + \rho\omega^2 u_y = 0 \tag{34}$$

(28)–(30) の応力テンソル成分 σ_{ij} を使うと、応力を用いた波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho\omega^2 u_x = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \rho\omega^2 u_y = 0 \tag{36}$$

or

$$\frac{\partial \sigma_{dx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{dy}}{\partial y} + \rho\omega^2 u_d = 0 \tag{37}$$
$$(d = x, y)$$

応力 $\boldsymbol{\sigma}$ を用いた波動方程式の弱形式を求める。
(35) 式、(36) 式にそれぞれ δu_x、δu_y を掛けて積分する。

$$\int_V \delta u_x\left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho\omega^2 u_x\right] + \delta u_y\left[\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \rho\omega^2 u_y\right] dV = 0 \tag{38}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\delta u_x \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \delta u_y \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \delta u_k \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}(\delta u_k \sigma_{kk}) - \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_k}\sigma_{kk} \\
&= \nabla \cdot \Big[(\delta u_k \sigma_{kk})\boldsymbol{e}_k\Big] - \frac{\partial \delta u_x}{\partial x}\sigma_{xx} - \frac{\partial \delta u_y}{\partial y}\sigma_{yy} \qquad (39) \\
\delta u_x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \delta u_y \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} &= \delta u_l \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_m} \qquad (m = l + 1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_m}(\delta u_l \sigma_{lm}) - \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m}\sigma_{lm} \\
&= \nabla \cdot \Big[(\delta u_l)\sigma_{lm})\boldsymbol{e}_m\Big] - \frac{\partial \delta u_x}{\partial y}\sigma_{xy} - \frac{\partial \delta u_y}{\partial x}\sigma_{yx} \qquad (40)
\end{aligned}
$$

これらを (38) 式に適用すると、次の弱形式を得る。

$$
\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial \delta u_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial \delta u_x}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial x}\sigma_{yx} \\
-\rho\omega^2 \delta u_x u_x - \rho\omega^2 \delta u_y u_y dV = 0 \qquad (41)
\end{aligned}
$$

ただし、自然境界項を 0 と置いた式である。
自然境界項は、

$$
\begin{aligned}
\int_V -\nabla \cdot \Big[(\delta u_k \sigma_{kk})\boldsymbol{e}_k\Big] - \nabla \cdot \Big[(\delta u_l \sigma_{lm})\boldsymbol{e}_m\Big] dV &= \int_S -\boldsymbol{n} \cdot \Big[(\delta u_m \sigma_{mm})\boldsymbol{e}_m\Big] - \boldsymbol{n}\Big[(\delta u_l \sigma_{lm})\boldsymbol{e}_m\Big] dS \qquad (l = m - 1) \qquad (42) \\
&= \int_S \boldsymbol{n} \cdot \Big[(-\delta u_m \sigma_{mm} - \delta u_l \sigma_{lm})\boldsymbol{e}_m\Big] dS \\
&= \int_S \boldsymbol{n} \cdot \Big[(-\delta u_x \sigma_{xx} - \delta u_y \sigma_{yx})\boldsymbol{e}_x \\
&\qquad (-\delta u_y \sigma_{yy} - \delta u_x \sigma_{xy})\boldsymbol{e}_y\Big] \\
&= \int_S \delta u_x \Big[- n_x \sigma_{xx} - n_y \sigma_{xy}\Big] \\
&\qquad \delta u_y \Big[- n_x \sigma_{yx} - n_y \sigma_{yy}\Big] dS \\
&= \int_S \delta u_x(-\sigma_{xn}) + \delta u_y(-\sigma_{yn}) dS \qquad (43) \\
\sigma_{dn} &= n_x \sigma_{dx} + n_y \sigma_{dy} \qquad (44) \\
d &= x, y
\end{aligned}
$$

弱形式 (41) 式に $\boldsymbol{\sigma}$ (28)–(30) 式を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial \delta u_x}{\partial x}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]+\frac{\partial \delta u_y}{\partial y}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u_x}{\partial x}\right] \\
+\frac{\partial \delta u_x}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial \delta u_y}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] \\
-\rho\omega^2\delta u_x u_x-\rho\omega^2\delta u_y u_y dV \\
=\int_S \delta u_x\sigma_{xn}+\delta u_y\sigma_{yn}dS
\end{aligned} \tag{45}
$$

ただし、(43) 式の自然境界項を復活させている。

いま領域を三角形要素で分割し、δu_x, δu_y, u_x, u_y を次のように補間する。

$$
\begin{aligned}
\delta u_x &= \{N\}^T\{\delta u_x\} \\
\delta u_y &= \{N\}^T\{\delta u_y\} \qquad (46) \\
u_x &= \{N\}^T\{u_x\} \\
u_y &= \{N\}^T\{u_y\} \qquad (47)
\end{aligned}
$$

(46) 式、(47) 式を弱形式 (45) 式に代入し、$\{\delta u_x\}$, $\{\delta u_y\}$ の変分をとると、

$$
\begin{aligned}
\int_V (\lambda+2\mu)\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\{u_x\}+\lambda\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_y\} \\
+\mu\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\{u_y\}+\mu\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_x\} \\
-\rho\omega^2\{N\}\{N\}^T\{u_x\}dV=\int_S\{N\}\sigma_{xn}dS
\end{aligned} \tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_V (\lambda+2\mu)\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_y\}+\lambda\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\{u_x\} \\
\mu\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\{u_y\}+\mu\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_x\} \\
-\rho\omega^2\{N\}\{N\}^T\{u_y\}dV=\int_S\{N\}\sigma_{yn}dS
\end{aligned} \tag{49}
$$

$$
\begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_y\} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_{xx}] & 0 \\ 0 & [M_{yy}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_y\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{bmatrix} \tag{50}
$$

$$
[K_{xx}] = \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dV \tag{51}
$$

$$
[K_{xy}] = \int_V \lambda \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} dV \tag{52}
$$

$$
[K_{yx}] = \int_V \lambda \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dV \tag{53}
$$

$$
[K_{yy}] = \int_V (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} dV \tag{54}
$$

$$
[M_{xx}] = \int_V \rho \{N\}\{N\}^T dV \tag{55}
$$

$$
[M_{yy}] = \int_V \rho \{N\}\{N\}^T dV \tag{56}
$$

$$
\{F_x\} = \int_S \{N\} \sigma_{xn} dS \tag{57}
$$

$$
\{F_y\} = \int_S \{N\} \sigma_{yn} dS \tag{58}
$$

$$
\sigma_{dn} = n_x \sigma_{dx} + n_y \sigma_{dy}
$$

$$
d = x, y
$$

ポート境界が $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$ のときは、$n_x = 1$, $n_y = 0$ より、

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xn} &= \sigma_{xx} \\
\sigma_{yn} &= \sigma_{yx}
\end{aligned} \tag{59}
$$

5　弾性エネルギーの時間平均

エネルギー密度の時間平均は、$\boldsymbol{\sigma}$:応力 (stress) テンソル、$\boldsymbol{\epsilon}$:ひずみ (strain) テンソルとすると。

$$
W = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\sigma_{ij} \epsilon_{ij}^*) \tag{60}
$$

Poyinting vector の時間平均は、

$$
P_j = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(-\sigma_{ij} v_i^*) \tag{61}
$$

ここに、$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトルで、

$$
v_i = \dot{u}_i = j\omega u_i \tag{62}
$$

であるから、

$$
P_j = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(j\omega \sigma_{ij} u_i^*) \tag{63}
$$

$$
\boldsymbol{P} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(j\omega \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{u}^*) \tag{64}
$$

ただし、本章の式は最大振幅ベースの表現で、実効値ベースだと $\frac{1}{2}$ が除かれる。

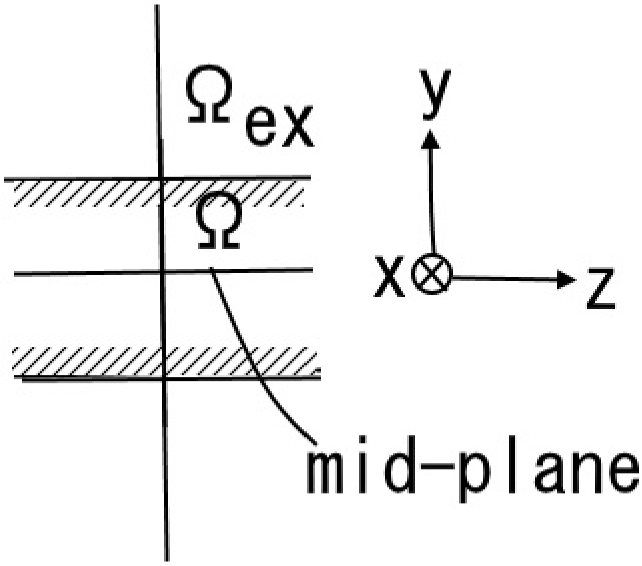

図 2　導波路固有値問題

6　Lamb wave 弾性導波路の 1D 固有値問題

1D 導波路として、

(a) x 方向伝搬 $e^{-j\beta x}$ (β:伝搬定数)

(b) z 方向は一様な媒質

(c) y 方向は y=0 を境に上下対称な媒質分布

Ω:内部領域（elastic plate)、Ω:外部領域（真空）である。

1D 弱形式は、(48) 式、(49) 式で、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\{N\}}{\partial x} = \left(\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right)^* = (-j\beta\{N\})^* = j\beta\{N\} \\
&\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} = -j\beta\{N\}^T
\end{aligned} \tag{65}
$$

とおく。

$$
\begin{aligned}
\int_V (\lambda+2\mu)\beta^2\{N\}\{N\}^T\{u_x\} + \lambda(j\beta)\{N\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_y\} \\
+\mu(-j\beta)\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\{N\}^T\{u_y\} + \mu\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_x\} \\
-\rho\omega^2\{N\}\{N\}^T\{u_x\}dV = 0
\end{aligned} \tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_V (\lambda+2\mu)\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_y\} + \lambda(-j\beta)\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\{N\}^T\{u_x\} \\
+\mu\beta^2\{N\}\{N\}^T\{u_y\} + \mu(j\beta)\{N\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{u_x\} \\
-\rho\omega^2\{N\}\{N\}^T\{u_y\}dV = 0
\end{aligned} \tag{67}
$$

$$\begin{bmatrix}[K_{xx}] & [K_{xy}]\\ [K_{yx}] & [K_{yy}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{u_x\}\\ \{u_y\}\end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix}[M_{xx}] & 0\\ 0 & [M_{yy}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{u_x\}\\ \{u_y\}\end{bmatrix} = 0 \tag{68}$$

$$[K_{xx}] = \int_V (\lambda+2\mu)\beta^2\{N\}\{N\}^T + \mu\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}dV \tag{69}$$

$$[K_{xy}] = \int_V \lambda(j\beta)\{N\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} + \mu(-j\beta)\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\{N\}^T dV \tag{70}$$

$$[K_{yx}] = \int_V \lambda(-j\beta)\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\{N\}^T + \mu(j\beta)\{N\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}dV \tag{71}$$

$$[K_{yy}] = \int_V (\lambda+2\mu)\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} + \mu\beta^2\{N\}\{N\}^T dV \tag{72}$$

$$[M_{xx}] = \int_V \rho\{N\}\{N\}^T dV \tag{73}$$

$$[M_{yy}] = \int_V \rho\{N\}\{N\}^T dV \tag{74}$$

(68) 式は β を与えて ω を求める固有値問題である。

ω を与えて β を求める固有値問題に変形する。

$$\beta^2[R_{xx}]\{u_x\} + [T_{xx}]\{u_x\} + (j\beta)[S_{xy}]\{u_y\} - \omega^2[M_{xx}]\{u_x\} = 0 \tag{75}$$

$$(j\beta)[S_{yx}]\{u_x\} + [T_{yy}]\{u_y\} + \beta^2[R_{yy}]\{u_y\} - \omega^2[M_{yy}]\{u_y\} = 0 \tag{76}$$

$$[R_{xx}] = \int_V (\lambda + 2\mu)\{N\}\{N\}^T dV \tag{77}$$

$$[T_{xx}] = \int_V \mu \frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} dV \tag{78}$$

$$[S_{xy}] = \int_V \lambda\{N\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} - \mu\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\{N\}^T dV \tag{79}$$

$$[M_{xx}] = \int_V \rho\{N\}\{N\}^T dV \tag{80}$$

$$[S_{yx}] = \int_V -\lambda\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\{N\}^T + \mu\{N\}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} dV \tag{81}$$

$$[T_{yy}] = \int_V (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y} dV \tag{82}$$

$$[R_{yy}] = \int_V \mu\{N\}\{N\}^T dV \tag{83}$$

$$[M_{yy}] = \int_V \rho\{N\}\{N\}^T dV \tag{84}$$

(75)、(76) 式は複素数の固有方程式だが、$\beta = -j\alpha$ $(j\beta = \alpha)$ とすると行列が実数の固有方程式になる。（ただし固有値は複素数）

$$-\alpha^2[R_{xx}]\{u_x\} + [T_{xx}]\{u_x\} + \alpha[S_{xy}]\{u_y\} - \omega^2[M_{xx}]\{u_x\} = 0 \tag{85}$$

$$\alpha[S_{yx}]\{u_x\} + [T_{yy}]\{u_y\} - \alpha^2[R_{yy}]\{u_y\} - \omega^2[M_{yy}]\{u_y\} = 0 \tag{86}$$

or

$$\left(\alpha^2\begin{bmatrix} -[R_{xx}] & 0 \\ 0 & -[R_{yy}] \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} 0 & [S_{xy}] \\ [S_{yx}] & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [T_{xx}] - \omega^2[M_{xx}] & 0 \\ 0 & [T_{yy}] - \omega^2[M_{yy}] \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_y\} \end{bmatrix} = 0 \tag{87}$$

or

$$(\alpha^2[A] + \alpha[B] + [C])\{x\} = 0 \tag{88}$$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_y\} \end{bmatrix} \tag{89}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -[R_{xx}] & 0 \\ 0 & -[R_{yy}] \end{bmatrix} \tag{90}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & [S_{xy}] \\ [S_{yx}] & 0 \end{bmatrix} \tag{91}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [T_{xx}] - \omega^2[M_{xx}] & 0 \\ 0 & [T_{yy}] - \omega^2[M_{yy}] \end{bmatrix} \tag{92}$$

(88) 式を線形化すると、

$$\begin{bmatrix} [0] & [1] \\ -[A]^{-1}[C] & -[A]^{-1}[B] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \{x\} \\ \alpha\{x\} \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} \{x\} \\ \alpha\{x\} \end{bmatrix} \tag{93}$$

(93) 式は ω を与えて α、すなわち $\beta = -j\alpha$ を求める固有値問題となっている。

(93) 式で固有ベクトル $\{u_x\}$, $\{u_y\}$ が求まると、固有モードの σ_{xx}, σ_{yx} は次式で求まる。

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
&= -j\beta(\lambda + 2\mu)u_x + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
&= -j\beta(\lambda + 2\mu)\{N\}^T\{u_x\} + \lambda \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y}\{u_y\} \qquad (94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \\
&= -j\beta\mu u_y + \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \\
&= -j\beta\mu\{N\}^T\{u_y\} + \mu \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y}\{u_x\} \qquad (95)
\end{aligned}$$

領域全体で固有値を求めると、偶奇の 2 つのモードが存在する。
偶モードのみにするには、mid-plane で $v_y = j\omega u_y = 0$ とすればよい。

7　固有モードの規格化

複素ポインティングベクトル $\boldsymbol{P}$ は、

$$\boldsymbol{P} = j\omega \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{u}^* \qquad (96)$$

成分表示

$$P_x = j\omega(\sigma_{xx}u_x^* + \sigma_{yx}u_y^*) \qquad (97)$$
$$P_y = j\omega(\sigma_{xy}u_x^* + \sigma_{yy}u_y^*) \qquad (98)$$

x 方向に伝搬する Lamb wave を仮定しているので P_x を用いる。

$$P_x = j\omega(\sigma_{xx}u_x^* + \sigma_{yx}u_y^*) \qquad (99)$$

$$\sigma_{xx} = -j\beta(\lambda + 2\mu)u_x + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad (100)$$

$$\sigma_{yx} = -j\beta\mu u_y + \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \qquad (101)$$

u_x, u_y, σ_{xx}, σ_{yx} を次式で規格化する。
規格化されたモード関数をそれぞれ f_x, f_y, g_{xx}, g_{yx} とすると、

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{\omega} d u_x \qquad u_x = \frac{\omega}{d} f_x \\
f_y &= \frac{1}{\omega} d u_y \qquad u_y = \frac{\omega}{d} f_y \\
g_{xx} &= d\sigma_{xx} \qquad \sigma_{xx} = \frac{1}{d} g_{xx} \\
g_{yx} &= d\sigma_{yx} \qquad \sigma_{yx} = \frac{1}{d} g_{yx}
\end{aligned} \tag{102}
$$

ここに、d:規格化定数である。
パワーを求める。

$$
\begin{aligned}
\int_y P_x dy &= j\omega \int_y \sigma_{xx} u_x^* + \sigma_{yx} u_y^* dy \\
&= j\omega \int_y \frac{1}{d} g_{xx} \left(\frac{\omega}{d} f_x \right)^* + \frac{1}{d} g_{yx} \left(\frac{\omega}{d} f_y \right)^* dy \\
&= j \frac{\omega^2}{|d|^2} \int_y g_{xx} f_x^* + g_{yx} f_y^* dy
\end{aligned} \tag{103}
$$

規格化条件

$$
j \int_y g_{xx} f_x^* + g_{yx} f_y^* dy = \frac{\beta^*}{|\beta|} \tag{104}
$$

とする。
(103) 式に代入すると、

$$
\int_y P_x dy = \frac{\omega^2}{|d|^2} \frac{\beta^*}{|\beta|} \tag{105}
$$

$$
\tag{106}
$$

or

$$
|d|^2 \int_y P_x dy = \omega^2 \frac{\beta^*}{|\beta|} \tag{107}
$$

規格化定数 d を求めると、

$$
d = \sqrt{\frac{\omega^2 \beta^*}{|\beta| \int_y P_x dy}} \tag{108}
$$

ここで複素ポインティングベクトルの積分は次式で計算する。

$$
\begin{aligned}
\int_y P_x dy &= j\omega \int_y (\sigma_{xx} u_x^* + \sigma_{yx} u_y^*) dy \\
&= j\omega \int_y \Big(-j\beta(\lambda+2\mu)u_x + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \Big) u_x^* \\
&\qquad + \Big(-j\beta\mu u_y + \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big) u_y^* dy \\
&= j\omega \int_y -j\beta(\lambda+2\mu)u_x u_x^* + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} u_x^* \\
&\qquad -j\beta u_y u_y^* + \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y^* dy \\
&= j\omega \int_y -j\beta(\lambda+2\mu)\{u_x^*\}^T\{N\}\{N\}^T\{u_x\} \\
&\qquad +\lambda\{u_x^*\}^T\{N\}\frac{\partial \{N\}^T}{\partial y}\{u_y\} \\
&\qquad -j\beta\mu\{u_y^*\}^T\{N\}\{N\}^T\{u_y\} \\
&\qquad +\mu\{u_y^*\}^T\{N\}\frac{\partial \{N\}^T}{\partial y}\{u_x\} dy
\end{aligned} \tag{109}
$$

実数モード関数の導入

伝搬モードのとき u_x と u_y は 90˚の位相差がある。 (計算で確認した。)

規格化条件 (104) 式：

$$
j \int_y g_{xx} f_x^* + g_{yx} f_y^* dy = \frac{\beta^*}{|\beta|} \qquad [(104)\text{ 式}]
$$

伝搬モードのとき

$$
j \int_y g_{xx} f_x^* + g_{yx} f_y^* dy = 1 \tag{110}
$$

$$
\to \int_y (jg_{xx}) f_x^* + g_{yx}(-jf_y)^* dy = 1
$$

$$
\to \int_y \hat{g}_{xx} f_x^* + g_{yx}\hat{f}_y^* dy = 1 \tag{111}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{g}_{xx} &= jg_{xx} \\
\hat{f}_y &= -jf_y
\end{aligned} \tag{112}
$$

f_x と $\hat{f}_y$ は 90˚の位相差がある。

$\hat{g}_{xx}$ と f^*x、g_{yx} と $\hat{f}_y$ は同位相であるから実数として扱うことができて、規格化条件は次式になる。

$$
\int_y \hat{g}_{xx} f_x + g_{yx}\hat{f}_y dy = 1 \tag{113}
$$

8 弾性波プレート導波路 (elastic plate waveguides), Lame wave の不連続問題 (2)

Lamb wave の固有モードが求められたので、不連続問題の定式化の後半部を記す。

固有モード展開

$$\hat{u}_y(x,y) = \sum_m (a_m e^{-j\beta_m x} + b_m e^{j\beta_m x})\omega \hat{f}_{ym}(y) \tag{114}$$

$$\sigma_{yx}(x,y) = \sum_m (a_m e^{-j\beta_m x} - b_m e^{j\beta_m x}) g_{yxm}(y) \tag{115}$$

$$u_x(x,y) = \sum_m (a_m e^{-j\beta_m x} - b_m e^{j\beta_m x})\omega f_{xm}(y) \tag{116}$$

$$\hat{\sigma}_{xx}(x,y) = \sum_m (a_m e^{-j\beta_m x} + b_m e^{j\beta_m x}) \hat{g}_{xxm}(y) \tag{117}$$

規格化条件 (113) 式

$$\int_y f_{xm}\hat{g}_{xxm} + \hat{f}_{ym} g_{yxm} dy = 1 \tag{118}$$

なお、

$$\begin{aligned} \hat{u}_y &= -j u_y \\ \hat{\sigma}_{xx} &= j\sigma_{xx} \end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{ym} &= -j f_{ym} \\ \hat{g}_{xxm} &= j g_{xxm} \end{aligned} \tag{120}$$

$\hat{\sigma}_{xx}$(117) 式 と $\hat{u}_y$(114) 式を使う。

$$\begin{aligned}
&\int_y f_{xm'}\hat{\sigma}_{xx} + \frac{1}{\omega}\hat{u}_y g_{yxm'} dy \\
&= (a_{m'} e^{-j\beta_{m'} x} + b_{m'} e^{j\beta_{m'} x}) \int_y f_{xm'}\hat{g}_{xxm'} + \hat{f}_{ym'} g_{yxm'} dy \\
&\quad (m = m' \text{以外のモードの項はモードの直交条件より } 0 \text{ とした}) \\
&= (a_{m'} e^{-j\beta_{m'} x} + b_{m'} e^{j\beta_{m'} x}) \qquad (121) \\
&\quad (\text{規格化条件より}) \qquad (122)
\end{aligned}$$

$b_{m'}$ を求めると、

$$b_{m'} = -a_{m'} e^{-2j\beta_{m'} x} + e^{-j\beta_{m'} x} \int_y f_{xm'}\hat{\sigma}_{xx} + \frac{1}{\omega}\hat{u}_y g_{yxm'} dy \tag{123}$$

u_x(116) 式に b_m を代入する。

$$u_x(x,y)=\sum_m\Big[a_m e^{-j\beta_m x}-\Big\{-a_m e^{-2j\beta_m x}$$
$$+e^{-j\beta_m x}\int_y f_{xm}\hat{\sigma}_{xx}+\frac{1}{\omega}\hat{u}_y g_{yxm}dy\Big\}e^{j\beta_m x}\Big]f_{xm}$$
$$=\sum_m\Big[2a_m e^{-j\beta_m x}$$
$$-\int_y f_{xm}\hat{\sigma}_{xx}+\frac{1}{\omega}\hat{u}_y g_{yxm}dy\Big]f_{xm} \tag{124}$$

σ_{yx}(115) 式にb_m を代入する。

$$\sigma_{yx}(x,y)=\sum_m\Big[2a_m e^{-j\beta_m x}$$
$$-\int_y f_{xm}\hat{\sigma}_{xx}+\frac{1}{\omega}\hat{u}_y g_{yxm}dy\Big]g_{yxm} \tag{125}$$

入射モードを $m=0$ のみとし、上式を離散化すると、

$$\{u_x\}=2a_0\{f_{x0}\}$$
$$-\sum_m\int_y f_{xm}\{N\}^T\{\hat{\sigma}_{xx}\}+\frac{1}{\omega}g_{yxm}\{N\}^T\{\hat{u}_y\}dy\{f_{xm}\} \tag{126}$$
$$\{\sigma_{yx}\}=2a_0\{g_{yx0}\}$$
$$-\sum_m\int_y f_{xm}\{N\}^T\{\hat{\sigma}_{xx}\}+\frac{1}{\omega}g_{yxm}\{N\}^T\{\hat{u}_y\}dy\{g_{yxm}\} \tag{127}$$

$$\begin{bmatrix}\{u_x\}\\\{\sigma_{yx}\}\end{bmatrix} = 2a_0\begin{bmatrix}\{f_{x0}\}\\\{g_{yx0}\}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}[F_{xx}] & [F_{xy}]\\ [F_{yx}] & [F_{yy}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{xx}\\\hat{u}_y\end{bmatrix} \tag{128}$$

$$[F_{xx}] = \sum_m \{f_{xm}\}\int_y f_{xm}\{N\}^T dy \tag{129}$$

$$[F_{xy}] = \sum_m \{f_{xm}\}\frac{1}{\omega}\int_y g_{xm}\{N\}^T dy \tag{130}$$

$$[F_{yx}] = \sum_m \{g_{yxm}\}\int_y f_{xm}\{N\}^T dy \tag{131}$$

$$[F_{yy}] = \sum_m \{g_{yxm}\}\frac{1}{\omega}\int_y g_{xm}\{N\}^T dy \tag{132}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{xx} &= j\sigma_{xx}\\ \hat{u}_y &= -ju_y\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{bmatrix}\{u_x\}\\\{\sigma_{yx}\}\end{bmatrix} = 2a_0\begin{bmatrix}\{f_{x0}\}\\\{g_{yx0}\}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}[\hat{F}_{xx}] & [\hat{F}_{xy}]\\ [\hat{F}_{yx}] & [\hat{F}_{yy}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_{xx}\\\hat{u}_y\end{bmatrix} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_{xx} &= jF_{xx}\\ \hat{F}_{xy} &= -jF_{xy}\\ \hat{F}_{yx} &= jF_{yx}\\ \hat{F}_{yy} &= -jF_{yy}\end{aligned} \tag{134}$$

(68) 式は次のように書ける。ポートの法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$ のとき、

$$\begin{bmatrix} [A_{xx}] & [A_{xy}] \\ [A_{yx}] & [A_{yy}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_x\} \\ \{u_u\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{bmatrix} \tag{135}$$

$$\begin{aligned} \{F_x\} &= \int_y \{N\}\sigma_{xx} dy \\ &= \int_y \{N\}\{N\}^T \{\sigma_{xx}\} dy \\ &= [B]\{\sigma_{xx}\} \end{aligned} \tag{136}$$

※ $\hat{\sigma}_{xx}$ にしないことに注意。

$$\begin{aligned} \{F_y\} &= \int_y \{N\}\sigma_{yx} dy \\ &= \int_y \{N\}\{N\}^T \{\sigma_{yx}\} dy \\ &= [B]\{\sigma_{yx}\} \end{aligned} \tag{137}$$

$$[B] = \int_y \{N\}\{N\}^T dy \tag{138}$$

領域内を 0、ポート上を 1 で表す。

$$[A] \begin{bmatrix} \{u_x\}_0 \\ \{u_y\}_0 \\ \{u_x\}_1 \\ \{u_y\}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ [B]\{\sigma_{xx}\}_1 \\ [B]\{\sigma_{yx}\}_1 \end{bmatrix} \tag{139}$$

(139) 式と (133) 式を組み合わせると、最終的な解くべき方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} & & & & [0] & [0] \\ & & & & [0] & [0] \\ & & [A] & & -[B] & [0] \\ & & & & [0] & -[B] \\ [0] & [0] & [1] & [\hat{F}_{xy}] & [\hat{F}_{xx}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\hat{F}_{yy}] & [\hat{F}_{yx}] & [1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_x\}_0 \\ \{u_y\}_0 \\ \{u_x\}_1 \\ \{u_y\}_1 \\ \{\sigma_{xx}\}_1 \\ \{\sigma_{yx}\}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2a_0\{f_{x0}\}_1 \\ 2a_0\{g_{yx0}\}_1 \end{bmatrix} \tag{140}$$

ポート上の振幅は次式で計算できる。
ポート 1 の入射振幅 $a_0|_{port1} = 1$、ポート 2 の入射振幅 $a_0|_{port2} = 0$ で計算した場合、反射係数、透過係数となる。

$$\begin{aligned} b_m &= -a_m + \int_y f_{xm}\hat{\sigma}_{xx} + \frac{1}{\omega}\hat{u}_y g_{yxm} dy \\ &= -a_m + \{f_{xm}\}^T \int_y \{N\}\{N\}^T dy \{\hat{\sigma}_{xx}\} \\ &\qquad + \{g_{yxm}\}^T \frac{1}{\omega}\int_y \{N\}\{N\}^T dy \{\hat{u}_y\} \end{aligned} \tag{141}$$

ここに $\hat{\sigma}_{xx}$, $\hat{u}_y$ はポート上のローカル座標系の向き (法線ベクトルの向き) を基準とした成分を想定している。全体座標系の $\hat{\sigma}_{xx}$, $\hat{u}_y$ を用いる場合は、ポートの法線ベクトル $\boldsymbol{n} = n_x \boldsymbol{e}_x \quad (n_x = \pm 1)$ とすると、

$$\begin{aligned} b_m &= -a_m + n_x \Big[\{f_{xm}\}^T \int_y \{N\}\{N\}^T dy \{\hat{\sigma}_{xx}\} \\ &\qquad + \{g_{yxm}\}^T \frac{1}{\omega}\int_y \{N\}\{N\}^T dy \{\hat{u}_y\} \Big] \end{aligned} \tag{142}$$

ポート 1 のとき、$n_x = -1$
ポート 2 のとき、$n_x = 1$

9 まとめ

弾性波プレート導波路 (2 次元) の固有値問題と不連続問題の周波数領域 FEM 定式化を行った。

10 参考文献

[1] Masanori Koshiba, Shoji Karakida, and Michio Suzuki, "Finite-Element Analysis of Lamb Wave Scattering in an Elastic Plate Waveguide", IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, vol. su-31, no. 1, January 1984

[2]Salam Alnabulsi, "Introduction to elastic wave equation", University of Calgary, Department of Math-

ematics and Statistics, October 15,2012

[3] Vincent Laude, Alexandre Reinhardt, Abdelkrim Khelif, "Equality of the energy and group velocities of bulk acoustic waves in piezoelectric media", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2005