Calculations Of Open (Unbounded) Full-wave Eigenmodes Of Waveguides by Edge Element FEM

ryujimiya

2020 年 02 月 25 日

1　はじめに

2 次元導波路の固有モードをベクトル波として解析するために辺要素 (edge elements) とスカラー節点要素 (scalar nodal elements) を用いて定式化を「Calculations Of Full-wave Eigenmodes Of Waveguides by Edge Element FEM」にて行った。
上記の文書では、周囲を遮蔽した closed waveguides が対象であった。
本書では開放形導波路 (open/unbounded waveguides) に適用するために境界積分を定式化している。

2　開放形 2 次元導波路の固有値問題

電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ について定式化を示す。磁界ベクトル $\boldsymbol{H}$ についても同様に定式化できる。
電界 $\boldsymbol{E}$ についての弱形式は境界積分項を含んだ次式となる。

$$\int_\Omega (\nabla \times \boldsymbol{E})^* \cdot (p \nabla \times \boldsymbol{E}) - k_0^2 \boldsymbol{E}^* \cdot q \boldsymbol{E} d\Omega = -\int_\Gamma \boldsymbol{E}^* \cdot (\boldsymbol{n} \times p \nabla \times \boldsymbol{E})\, d\Gamma \tag{1}$$

ここに、$*$ は complex conjugate、$k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ は真空の波数、ϵ_0、μ_0 はそれぞれ真空の誘電率、真空の透磁率である。p、q は次式で表されるテンソルであり、ここでは対角成分のみ存在する媒質に関して定式化する。

$$\begin{aligned} p &= \mu_r^{-1} \\ q &= \epsilon_r \\ p &= \begin{bmatrix} p_{xx} & & \\ & p_{yy} & \\ & & p_{zz} \end{bmatrix} \\ q &= \begin{bmatrix} q_{xx} & & \\ & q_{yy} & \\ & & q_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

ここに、ϵ_r、μ_r は媒質の比誘電率テンソル、比透磁率テンソルである。

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t + E_z \boldsymbol{a}_z \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}_t^* + E_z^* \boldsymbol{a}_z \tag{4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t + \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \tag{5}$$

$$p\nabla \times \boldsymbol{E} = p_{zz}\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + p_{tt}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t + p_{tt}\nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \tag{6}$$

$$\boldsymbol{n} \times p\nabla \times \boldsymbol{E} = p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + \boldsymbol{n} \times p_{tt}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t + \boldsymbol{n} \times p_{tt}\nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \tag{7}$$

$$\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^* \cdot p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t + \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt}\nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \tag{8}$$

ここに、p_{tt} は、

$$p_{tt} = \begin{bmatrix} p_{xx} & \\ & p_{yy} \end{bmatrix} \tag{9}$$

である。

第１項：$\boldsymbol{E}^* \cdot p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t$

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_y\right) \times (E_x\boldsymbol{a}_x + E_y\boldsymbol{a}_y) \\ &= \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_z \end{aligned} \tag{10}$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x$ のとき、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t &= \boldsymbol{a}_x \times \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_z \\ &= -\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_y \end{aligned} \tag{11}$$

$$p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t = -p_{zz}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_y \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^* \cdot p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t &= \left(E_x^*\boldsymbol{a}_x + E_y^*\boldsymbol{a}_y + E_z^*\boldsymbol{a}_z\right) \cdot \left\{-p_{zz}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_y\right\} \\ &= -E_y^* p_{zz}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y$ のとき、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t &= \boldsymbol{a}_y \times \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_z \\
&= \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_x && (14)
\end{aligned}$$

$$p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t = p_{zz}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_x \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^* \cdot p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t &= \left(E_x^*\boldsymbol{a}_x + E_y^*\boldsymbol{a}_y + E_z^*\boldsymbol{a}_z\right) \cdot \left\{p_{zz}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\boldsymbol{a}_x\right)\right\} \\
&= E_x^* p_{zz}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) && (16)
\end{aligned}$$

第 2 項 : $\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t &= \boldsymbol{a}_z \times (E_x\boldsymbol{a}_x + E_y\boldsymbol{a}_y) \\
&= E_x\boldsymbol{a}_y - E_y\boldsymbol{a}_x && (17)
\end{aligned}$$

$$p_{tt}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t = p_{yy}\frac{\partial E_x}{\partial z}\boldsymbol{a}_y - p_{xx}\frac{\partial E_y}{\partial z}\boldsymbol{a}_x \tag{18}$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x$ のとき、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \times p_{tt}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t &= \boldsymbol{a}_x \times \left(p_{yy}\frac{\partial E_x}{\partial z}\boldsymbol{a}_y - p_{xx}\frac{\partial E_y}{\partial z}\boldsymbol{a}_x\right) \\
&= p_{yy}\frac{\partial E_x}{\partial z}\boldsymbol{a}_z && (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t &= \left(E_x^*\boldsymbol{a}_x + E_y^*\boldsymbol{a}_y + E_z^*\boldsymbol{a}_z\right) \cdot p_{yy}\frac{\partial E_x}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \\
&= E_z^* p_{yy}\frac{\partial E_x}{\partial z} && (20)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y$ のとき、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \times p_{tt}\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t &= \boldsymbol{a}_y \times \left(p_{yy}\frac{\partial E_x}{\partial z}\boldsymbol{a}_y - p_{xx}\frac{\partial E_y}{\partial z}\boldsymbol{a}_x\right) \\
&= p_{xx}\frac{\partial E_y}{\partial z}\boldsymbol{a}_z && (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t &= \left(E_x^*\boldsymbol{a}_x + E_y^*\boldsymbol{a}_y + E_z^*\boldsymbol{a}_z\right) \cdot p_{xx}\frac{\partial E_y}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \\
&= E_z^* p_{xx}\frac{\partial E_y}{\partial z} && (22)
\end{aligned}$$

第 3 項：$\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z$

$$\begin{aligned}
\nabla_t E_z &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_y \right) E_z \\
&= \frac{\partial E_z}{\partial x}\boldsymbol{a}_x + \frac{\partial E_z}{\partial y}\boldsymbol{a}_y \qquad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\boldsymbol{a}_x + \frac{\partial E_z}{\partial y}\boldsymbol{a}_y \right) \times \boldsymbol{a}_z \\
&= -\frac{\partial E_z}{\partial x}\boldsymbol{a}_y + \frac{\partial E_z}{\partial y}\boldsymbol{a}_x \qquad (24)
\end{aligned}$$

$$p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z = -p_{yy}\frac{\partial E_z}{\partial x}\boldsymbol{a}_y + p_{xx}\frac{\partial E_z}{\partial y}\boldsymbol{a}_x \qquad (25)$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x$ のとき、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z &= \boldsymbol{a}_x \times \left(-p_{yy}\frac{\partial E_z}{\partial x}\boldsymbol{a}_y + p_{xx}\frac{\partial E_z}{\partial y}\boldsymbol{a}_x \right) \\
&= -p_{yy}\frac{\partial E_z}{\partial x}\boldsymbol{a}_z \qquad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z &= \left(E_x^*\boldsymbol{a}_x + E_y^*\boldsymbol{a}_y + E_z^*\boldsymbol{a}_z \right) \cdot \left(-p_{yy}\frac{\partial E_z}{\partial x}\boldsymbol{a}_z \right) \\
&= -E_z^* p_{yy}\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad (27)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y$ のとき、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z &= \boldsymbol{a}_y \times \left(-p_{yy}\frac{\partial E_z}{\partial x}\boldsymbol{a}_y + p_{xx}\frac{\partial E_z}{\partial y}\boldsymbol{a}_x \right) \\
&= -p_{xx}\frac{\partial E_z}{\partial y}\boldsymbol{a}_z \qquad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z &= \left(E_x^*\boldsymbol{a}_x + E_y^*\boldsymbol{a}_y + E_z^*\boldsymbol{a}_z \right) \cdot \left(-p_{xx}\frac{\partial E_z}{\partial y}\boldsymbol{a}_z \right) \\
&= -E_z^* p_{xx}\frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad (29)
\end{aligned}$$

開放形導波路の導波モードの伝搬定数を β、境界に垂直な方向の減衰定数を α とする。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta \qquad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\alpha \qquad (31)$$

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - k_0^2\epsilon_r} \qquad (32)$$

とすると、

第 1 項 $\boldsymbol{E}^* \cdot p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= -\alpha \\
\boldsymbol{E}^* \cdot p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t &= -E_y^* p_{zz}\left(-\alpha E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \\
&= \alpha p_{zz} E_y^* E_y + p_{zz} E_y^* \frac{\partial E_x}{\partial y} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} &= -\alpha \\
\boldsymbol{E}^* \cdot p_{zz}\boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t &= E_x^* p_{zz}\left\{\frac{\partial E_y}{\partial x} - (-\alpha)\, E_x\right\} \\
&= p_{zz} E_x^* \frac{\partial E_y}{\partial x} + \alpha p_{zz} E_x^* E_x \qquad (34)
\end{aligned}
$$

第 2 項 $\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t &= Ez^* p_{yy}\,(-j\beta)\, E_x \\
&= -j\beta p_{yy} E_z^* E_x \qquad (35)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t &= E_z^* p_{xx}\,(-j\beta)\, E_y \\
&= -j\beta p_{xx} E_z^* E_y \qquad (36)
\end{aligned}
$$

第 3 項：$\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= -\alpha \\
\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z &= -E_z^* p_{yy}\,(-\alpha)\, E_z \\
&= \alpha p_{yy} E_z^* E_z \qquad (37)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} &= -\alpha \\
\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z &= -E_z^* p_{xx}\,(-\alpha)\, E_z \\
&= \alpha p_{xx} E_z^* E_z \qquad (38)
\end{aligned}
$$

領域を三角形要素で分割し、

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t + E_z \boldsymbol{a}_z \tag{39}$$

$$\boldsymbol{E}_t = \sum_j \boldsymbol{N}_{tj} E_{tj} \tag{40}$$

$$E_z = \sum_j \underline{j} N_j E_{zj} \tag{41}$$

or

$$\boldsymbol{E} = \sum_j \boldsymbol{N}_j E_j \tag{42}$$

と補間すると、境界積分項は、

$$-\int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot (\boldsymbol{n} \times p \nabla \times \boldsymbol{E})\, d\Gamma$$
$$= -\int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot p_{zz} \boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t d\Gamma - \int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t d\Gamma - \int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z d\Gamma \tag{43}$$

積分

$$\int_\Gamma d\Gamma \to \int_y dy \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x \text{のとき}) \tag{44}$$

$$\int_\Gamma d\Gamma \to \int_x dx \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y \text{のとき}) \tag{45}$$

(43) 式境界積分第 1 項：

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x$ のとき、

$$-\int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot p_{zz} \boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t d\Gamma = -\int_y \alpha p_{zz} N_{yi} N_{yj} dy E_{yj} - \int_y p_{zz} N_{yi} \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \tag{46}$$

N_{yi} は線要素 edge element 形状関数 $\boldsymbol{N}_{ti}$ の線方向成分である。

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y$ のとき、

$$-\int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot \boldsymbol{n} \times \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t d\Gamma = -\int_x p_{zz} N_{xi} \frac{\partial E_y}{\partial x} dx - \int_x \alpha p_{zz} N_{xi} N_{xj} dx E_{xj} \tag{47}$$

N_{xi} は線要素 edge element 形状関数 $\boldsymbol{N}_i$ の線方向成分である。

(43) 式境界積分第 2 項：

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x$ のとき、

$$-\int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t d\Gamma = -\int_y -j\beta p_{yy} \left(j N_{zi}\right)^* E_x dy$$
$$= \int_y \beta p_{yy} N_{zi} E_x dy \tag{48}$$

N_{zi} は線要素 scalar element 形状関数 N_i である。

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y$ のとき、

$$
\begin{aligned}
-\int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t d\Gamma &= -\int_x -j\beta p_{xx} \left(jN_{zi}\right)^* E_y dx \\
&= \int_x \beta p_{xx} N_{zi} E_y dx
\end{aligned}
\tag{49}
$$

N_{zi} は線要素 scalar element 形状関数 N_i である。

(43) 式境界積分第 3 項：

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x$ のとき、

$$
\begin{aligned}
-\int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z d\Gamma &= -\int_y \alpha p_{yy} \left(jN_{zi}\right)^* \left(jN_{zj}\right) dy E_{zj} \\
&= -\int_y \alpha p_{yy} N_{zi} N_{zj} dy E_{zj} \\
&= -\int_y \alpha\beta p_{yy} N_{zi} N_{zj} dy \overline{E}_{zj}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

(ただし、 $E_z = \beta \overline{E}_z$ の変数変換を用いた)

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y$ のとき、

$$
\begin{aligned}
-\int_\Gamma \boldsymbol{N}_i^* \cdot \boldsymbol{n} \times p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z d\Gamma &= -\int_x \alpha p_{xx} \left(jN_{zi}\right)^* \left(jN_{zj}\right) dx E_{zj} \\
&= -\int_x \alpha p_{xx} N_{zi} N_{zj} dx E_{zj} \\
&= -\int_x \alpha\beta p_{xx} N_{zi} N_{zj} dx \overline{E}_{zj}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

(ただし、 $E_z = \beta \overline{E}_z$ の変数変換を用いた)

(46) 式〜(51) 式は (1) 式の右辺の項なので、-1 倍して左辺に移す。

境界積分項だけ示すと、

$$
[U_{tt}]\{E_t\} + [U_{tnt}]\{E_t\} = 0 \tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
&\beta[U_{znt}]\{E_t\} + \beta[U_{zz}]\{E_z\} = 0 \\
\rightarrow \quad &\beta^2[U_{znt}]\{E_t\} + \beta^2[U_{zz}]\{E_z\} = 0
\end{aligned}
\tag{53}
$$

(closed waveguide の固有値問題の $\overline{E}_z^*$ に関する式にあわせて β 倍した)

$$
[U_{tt}]_{ij} = \int_y \alpha p_{zz} N_{yi} N_{yj} dy \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x \text{のとき}) \tag{54}
$$

$$
= \int_x \alpha p_{zz} N_{xi} N_{xj} dx \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y \text{のとき}) \tag{55}
$$

$$
[U_{tnt}]_{ij} = \int_y p_{zz} N_{yi} \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_{tj}}{\partial y} \cdot \boldsymbol{a}_x \right) dy \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x \text{のとき}) \tag{56}
$$

$$
= \int_x p_{zz} N_{xi} \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_{tj}}{\partial x} \cdot \boldsymbol{a}_y \right) dx \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y \text{のとき}) \tag{57}
$$

$$
[U_{znt}]_{ij} = -\int_y p_{yy} N_{zi} (\boldsymbol{N}_{tj} \cdot \boldsymbol{a}_x) dy \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x \text{のとき}) \tag{58}
$$

$$
= -\int_x p_{xx} N_{zi} (\boldsymbol{N}_{tj} \cdot \boldsymbol{a}_y) dx \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y \text{のとき}) \tag{59}
$$

$$[U_{zz}]_{ij} = \int_y \alpha p_{yy} N_{zi} N_{zj} dy \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x \text{のとき}) \tag{60}$$

$$= \int_x \alpha p_{xx} N_{zi} N_{zj} dx \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_y \text{のとき}) \tag{61}$$

ここに、N_{xi}、N_{yi} は線要素 edge element 形状関数の線方向成分、N_{zi} は線要素 scalar element 形状関数、$\boldsymbol{N}_{ti}$ は線要素が属する三角形要素の edge element の形状関数の辺上の値である。

なお、線要素に垂直な成分 E_n は、は領域内部の未知数 $\{E_t\}$ を用いて次式で補間されている。

$$E_n = \left(\sum_k \boldsymbol{N}_{tk} E_{tk} \right) \cdot \boldsymbol{n} \bigg|_\Gamma \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x \text{ or } \boldsymbol{a}_y) \tag{62}$$

α は β から推定する。したがって固有値問題を複数回反復して解く必要がある。

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 \epsilon_r} \tag{63}$$

境界積分を含まない closed waveguides の固有値問題は、

$$\begin{bmatrix} [T_{tt}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E_t\} \\ \{\overline{E}_z\} \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} -[R_{tt}] & -[S_{tz}] \\ -[S_{zt}] & -[T_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E_t\} \\ \{\overline{E}_z\} \end{bmatrix} \tag{64}$$

であった。

開放形問題に現れる (52) 式、(53) 式を (64) 式に加えると、β^2 に関する固有値問題となる。

$$\begin{bmatrix} [T_{tt}] + [U_{tt}] + [U_{tnt}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E_t\} \\ \{\overline{E}_z\} \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} -[R_{tt}] & -[S_{tz}] \\ -[S_{zt}] - [U_{znt}] & -[T_{zz}] - [U_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E_t\} \\ \{\overline{E}_z\} \end{bmatrix} \tag{65}$$

(65) 式を用いると、非物理的な解が発生した。

そこで、$E_n = 0$ を課すことにした。すなわち、境界に垂直な n 方向界成分が無いと仮定する (n 方向について TEM 波)。その場合、$[U_{tnt}]$、$[U_{znt}]$ が消滅し次式となる。

$$\begin{bmatrix} [T_{tt}] + [U_{tt}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E_t\} \\ \{\overline{E}_z\} \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} -[R_{tt}] & -[S_{tz}] \\ -[S_{zt}] & -[T_{zz}] - [U_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E_t\} \\ \{\overline{E}_z\} \end{bmatrix} \tag{66}$$

この (66) 式を用いると物理モードだけになった。

3　まとめ

開放形 2 次元導波路の固有モードをベクトル波として解析するために境界積分項を定式化した。

4　参考文献