Calculations Of Full-wave Eigenmodes Of Waveguides by Edge Element FEM

ryujimiya

2020 年 02 月 04 日

1　はじめに

2 次元導波路の固有モードをベクトル波として解析するために辺要素 (edge elements) とスカラー節点要素 (scalar nodal elements) を用いて定式化を行う。

2　2 次元導波路の固有値問題

電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ について定式化を示す。磁界ベクトル $\boldsymbol{H}$ についても同様に定式化できる。
電界 $\boldsymbol{E}$ についての弱形式は、

$$\int_\Omega (\nabla \times \boldsymbol{E})^* \cdot (p\nabla \times \boldsymbol{E}) - k_0^2 \boldsymbol{E}^* \cdot q\boldsymbol{E} d\Omega = 0 \tag{1}$$

ここに、$*$ は complex conjugate、$k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ は真空の波数、ϵ_0、μ_0 はそれぞれ真空の誘電率、真空の透磁率である。p、q は次式で表されるテンソルであり、ここでは対角成分のみ存在する媒質に関して定式化する。

$$\begin{aligned}
p &= \mu_r^{-1} \\
q &= \epsilon_r \\
p &= \begin{bmatrix} p_{xx} & & \\ & p_{yy} & \\ & & p_{zz} \end{bmatrix} \\
q &= \begin{bmatrix} q_{xx} & & \\ & q_{yy} & \\ & & q_{zz} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2}$$

ここに、ϵ_r、μ_r は媒質の比誘電率テンソル、比透磁率テンソルである。
(1) 式の各項を計算する。

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t + E_z \boldsymbol{a}_z \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}_t^* + E_z^* \boldsymbol{a}_z \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E} &= \left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z\right) \times (\boldsymbol{E}_t + E_z \boldsymbol{a}_z) \\
&= \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t + \nabla_t \times (E_z \boldsymbol{a}_z) \\
&= \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{E}_t + \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
\nabla_t (E_z \boldsymbol{a}_z) &= E_z \nabla_t \times \boldsymbol{a}_z + \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \\
&= \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \\
(\nabla_t \times \boldsymbol{a}_z = 0)&
\end{aligned}
$$

を用いた。

$e^{-j\beta z}$(β : 伝搬定数) の波を考えると、

$$
\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E} &= \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + j\beta \boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{a}_z + \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z && (5) \\
(\nabla \times \boldsymbol{E})^* &= \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t^* - j\beta \boldsymbol{E}_t^* \times \boldsymbol{a}_z + \nabla_t E_z^* \times \boldsymbol{a}_z && (6)
\end{aligned}
$$

よって (1) 式の第一項の被積分項は、

$$
\begin{aligned}
(\nabla \times \boldsymbol{E})^* \cdot (p \nabla \times \boldsymbol{E}) &= (\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t^* - j\beta \boldsymbol{E}_t^* \times \boldsymbol{a}_z + \nabla_t E_z^* \times \boldsymbol{a}_z) \cdot \{p(\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + j\beta \boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{a}_z + \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z)\} \\
&= (\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t^* - j\beta \boldsymbol{E}_t^* \times \boldsymbol{a}_z + \nabla_t E_z^* \times \boldsymbol{a}_z) \cdot (p_{zz} \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + j\beta p_{tt} \boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{a}_z + p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z) \\
&= p_{zz} \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t^* \cdot \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t + \beta^2 \boldsymbol{E}_t^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt} \boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{a}_z - j\beta \boldsymbol{E}_t^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \\
&\quad + j\beta \nabla_t E_z^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt} \boldsymbol{E}_t \boldsymbol{a}_z + \nabla_t E_z^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z && (7)
\end{aligned}
$$

また (1) 式の第二項の被積分項は、

$$
k_0^2 \boldsymbol{E}^* \cdot q \boldsymbol{E} = k_0^2 (\boldsymbol{E}_t^* \cdot q_{tt} \boldsymbol{E}_t + q_{zz} E_z^* E_z) \tag{8}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
p_{tt} &= \begin{bmatrix} p_{xx} & \\ & p_{yy} \end{bmatrix} \\
q_{tt} &= \begin{bmatrix} q_{xx} & \\ & q_{yy} \end{bmatrix} && (9)
\end{aligned}
$$

と置いた。

これらを (1) 式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega p_{zz} \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t^* \cdot \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t \\
&\quad + \beta^2 \boldsymbol{E}_t^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt} \boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{a}_z - j\beta \boldsymbol{E}_t^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \\
&\quad + j\beta \nabla_t E_z^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt} \boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{a}_z + \nabla_t E_z^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt} \nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \\
&\quad - k_0^2 \boldsymbol{E}_t^* q_{tt} \boldsymbol{E}_t - k_0^2 q_{zz} E_z^* E_z d\Omega = 0 && (10)
\end{aligned}
$$

(10) 式は次の 2 つの式に分離できる。

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega p_{zz}\nabla_t \times \boldsymbol{E}_t^* \cdot \nabla_t \times \boldsymbol{E}_t \\
&\quad +\beta^2 \boldsymbol{E}_t^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt}\boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{a}_z - j\beta \boldsymbol{E}_t^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt}\nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \\
&\quad -k_0^2 \boldsymbol{E}_t^* q_{tt} \boldsymbol{E}_t d\Omega = 0 \qquad (11)\\
&\int_\Omega j\beta \nabla_t E_z^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt}\boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{a}_z + \nabla_t E_z^* \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt}\nabla_t E_z \times \boldsymbol{a}_z \\
&\quad -k_0^2 q_{zz} E_z^* E_z d\Omega = 0 \qquad (12)
\end{aligned}$$

領域を三角形要素で分割し、要素内の電界 $\boldsymbol{E}$ を次のように補間する。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_t + E_z \boldsymbol{a}_z \\
\boldsymbol{E}_t &= \sum_j E_{tj}\boldsymbol{N}_{tj} \qquad (13)\\
E_z &= j\sum_j E_{zj} N_j \qquad (14)
\end{aligned}$$

ただし、$\boldsymbol{N}_{tj}$ は edge element のベクトル形状関数、N_j は edge element に対応する scalar nodal element の形状関数である。

z 成分に j が現れていることに注意。

(13) 式、(14) 式を (11) 式、(12) 式に代入して変分を取ると、

$$\begin{aligned}
\beta^2[R_{tt}]\{E_t\} + [T_{tt}]\{E_t\} + \beta[S_{tz}]\{E_z\} &= \{0\} \\
\beta[S_{zt}]\{E_t\} + [T_{zz}]\{E_z\} &= \{0\} \qquad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[R_{tt}]_{ij} &= \int_\Omega \boldsymbol{N}_{ti} \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt}\boldsymbol{N}_{tj} \times \boldsymbol{a}_z d\Omega \\
[S_{tz}]_{ij} &= \int_\Omega \boldsymbol{N}_{ti} \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt}\nabla_t N_j \times \boldsymbol{a}_z d\Omega \\
[S_{zt}]_{ij} &= \int_\Omega \nabla_t N_j \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt}\boldsymbol{N}_{tj} \times \boldsymbol{a}_z d\Omega \\
[T_{tt}]_{ij} &= \int_\Omega p_{zz}\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{ti} \cdot \nabla_t \times \boldsymbol{N}_{tj} - k_0^2 \boldsymbol{N}_{ti} \cdot q_{tt}\boldsymbol{N}_{tj} d\Omega \\
[T_{zz}]_{ij} &= \int_\Omega \nabla_t N_i \times \boldsymbol{a}_z \cdot p_{tt}\nabla_t N_j \times \boldsymbol{a}_z - k_0^2 q_{zz} N_i N_j d\Omega \qquad (16)
\end{aligned}$$

(16) 式の積分は数値積分 (Gauss 7 積分点) で計算できる。

(15) 式で、

$$\{E_z\} = \beta\{\overline{E}_z\} \qquad (17)$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
\beta^2[R_{tt}]\{E_t\} + [T_{tt}]\{E_t\} + \beta^2[S_{tz}]\{\overline{E}_z\} &= \{0\} \\
\beta[S_{zt}]\{E_t\} + \beta[T_{zz}]\{\overline{E}_z\} &= \{0\} \\
\rightarrow \beta^2[S_{zt}]\{E_t\} + \beta^2[T_{zz}]\{\overline{E}_z\} &= \{0\}
\end{aligned}$$

(18)

したがって、

$$\begin{bmatrix} [T_{tt}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E_t\} \\ \{\overline{E}_z\} \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} -[R_{tt}] & -[S_{tz}] \\ -[S_{zt}] & -[T_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E_t\} \\ \{\overline{E}_z\} \end{bmatrix} \tag{19}$$

この (19) 式の固有値問題を解いて、β、$\{E_t\}$、$\{E_z\}$ を求めることができる。ただし、(19) 式で得られるのは $\{\overline{E}_z\}$ なので (17) 式を使って $\{E_z\}$ に変換する。
電界 $\boldsymbol{E}$ が求まれば、磁界 $\boldsymbol{H}$ は要素毎に

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r}\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{20}$$

を計算して求めることができる。

3 edge/nodal element

三角形要素に対する scalar nodal element 形状関数は、

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1 \\ N_2 &= L_2 \\ N_3 &= L_3 \end{aligned} \tag{21}$$

edge element のベクトル形状関数は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_{t1} &= l_1\left(L_2\nabla_t L_3 - L_3\nabla_t L_2\right) \\ \boldsymbol{N}_{t2} &= l_2\left(L_3\nabla_t L_1 - L_1\nabla_t L_3\right) \\ \boldsymbol{N}_{t3} &= l_3\left(L_1\nabla_t L_2 - L_2\nabla_t L_1\right) \end{aligned} \tag{22}$$

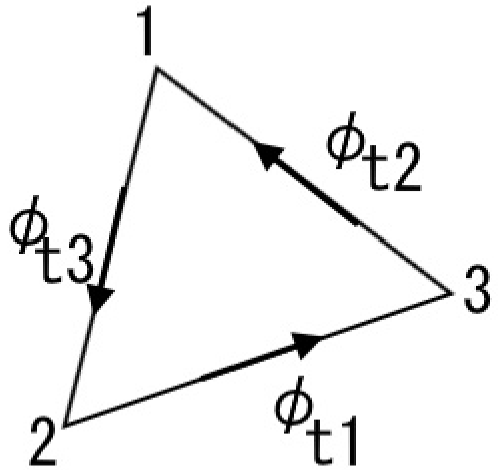

図 1　edge/nodal triangular element

ここに、$l_i (i = 1, 2, 3)$ は

$$
\begin{aligned}
l_1 &= |\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2| \\
l_2 &= |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3| \\
l_3 &= |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| \\
l_1 &= \sqrt{\bar{b}_1^2 + \bar{c}_1^2} \\
l_2 &= \sqrt{\bar{b}_2^2 + \bar{c}_2^2} \\
l_3 &= \sqrt{\bar{b}_3^2 + \bar{c}_3^2} \\
\bar{b}_i &= \frac{b_i}{2A_e} \\
\bar{c}_i &= \frac{c_i}{2A_e}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

L_i の grad は、

$$
\begin{aligned}
\nabla_t L_1 &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L_1}{\partial y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \\
\nabla_t L_2 &= \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
\nabla_t L_3 &= -\nabla_t L_1 - \nabla_t L_2
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$\boldsymbol{N}_{ti}$ の rot は、

$$
\begin{aligned}
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t1} &= \nabla_t \times \{ l_1 (L_2 \nabla_t L_3 - L_3 \nabla_t L_2) \} \\
&= l_1 \{ \nabla_t \times (L_2 \nabla_t L_3) - \nabla_t \times (L_3 \nabla_t L_2) \} \\
&= l_1 \{ L_2 \nabla_t \times \nabla_t L_3 + \nabla_t L_2 \times \nabla_t L_3 - L_3 \nabla_t \times \nabla_t L_2 - \nabla_t L_3 \times \nabla_t L_2 \} \\
&= 2 l_1 \nabla_t L_2 \times \nabla_t L_3 \\
&\quad (\text{ただし } \nabla_t \times \nabla_t \phi = 0 \text{ を用いた}) \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t2} &= 2 l_2 \nabla_t L_3 \times \nabla_t L_1 \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t3} &= 2 l_3 \nabla_t L_1 \times \nabla_t L_2
\end{aligned}
\tag{25}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\nabla_t L_1 \times \nabla_t L_2 &= (b_1 \boldsymbol{a}_x + c_1 \boldsymbol{a}_y) \times (b_2 \boldsymbol{a}_x + c_2 \boldsymbol{a}_y) \\
&= b_1 c_2 (\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_y) + c_1 b_2 (\boldsymbol{a}_y \times \boldsymbol{a}_x) \\
&= (b_1 c_2 - b_2 c_1) \boldsymbol{a}_z \\
&= \frac{1}{(2A_e)^2} \left(\bar{b}_1 \bar{c}_2 - \bar{b}_2 \bar{c}_1 \right) \boldsymbol{a}_z \\
&= \frac{1}{(2A_e)^2} 2A_e \boldsymbol{a}_z \\
&\quad (\text{ただし、} \bar{b}_1 \bar{c}_2 - \bar{b}_2 \bar{c}_1 = 2A_e) \\
&= \frac{1}{2A_e} \boldsymbol{a}_z
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t1} &= \frac{l_1}{A_e} \boldsymbol{a}_z \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t2} &= \frac{l_2}{A_e} \boldsymbol{a}_z \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t3} &= \frac{l_3}{A_e} \boldsymbol{a}_z
\end{aligned} \tag{26}
$$

4 まとめ

2 次元導波路の固有モードをベクトル波として解析するために edge elements と scalar nodal elements を用いて定式化を行った。

5 参考文献

[1] Masanori Koshiba, Shinji Maruyama, and Koichi Hirayama, ”A vector Finite element Method With the High-order Mixed-interpolation-Type Triangular Elements for optical Waveguiding problems”, Journal of Lighttwave Technolooy, vol. 12, no. 3, Narch 1994