Two Dimensional Transient Eddy Current Problem

ryujimiya

2020 年 06 月 30 日

1 はじめに

2 次元過渡渦電流解析の定式化を行う。

2 支配方程式

Maxwell の電磁方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{4}$$

$\boldsymbol{E}$:電界、$\boldsymbol{H}$:磁界、$\boldsymbol{D}$:電束密度、$\boldsymbol{B}$:磁束密度、ρ:電荷密度である。
構成方程式

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \quad \text{(オームの法則)} \tag{7}$$

$\boldsymbol{J}$: 電流密度、μ : 媒質の透磁率、ϵ : 誘電率、σ : 導電率である。
(1) 式の右辺の $\boldsymbol{D}$ の時間微分項すなわち変位電流を無視できる問題は準定常磁界問題となり、渦電流問題として扱われている。
このとき、変位電流が無視できるとすれば、電流密度 $\boldsymbol{J}$ の発散は 0 となる。
したがって、渦電流問題の支配方程式は、

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{8}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{11}$$

$\boldsymbol{A}$-ϕ 法では電気スカラーポテンシャル ϕ および磁気ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を導入して (2)、(3) 式を満たすような電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{H}$ を次のように表す。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B} \quad \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{13}$$

(13) 式と (5) 式を用いるとベクトル公式から (2) 式と (3) 式は恒等的に成立するため、(8) 式と (11) 式を用いて次の $\boldsymbol{A}$ と ϕ の支配方程式が得られる。

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}) = \sigma \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) \tag{14}$$

$$\nabla \cdot \left\{ \sigma \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) \right\} = 0 \tag{15}$$

なお、

$$\boldsymbol{J} = \sigma \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) \tag{16}$$

である。

3　2 次元過渡渦電流解析

支配方程式

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{A}) = -\sigma \left(\nabla\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) \tag{17}$$

$\boldsymbol{A}$ は磁気ベクトルポテンシャル、ϕ は電圧、$\nu = \mu^{-1}$ は磁気抵抗率、σ は導電率である。
ゲージ条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{18}$$

を付加し、問題を 2 次元場に限定すれば、$\boldsymbol{A}$ の z 成分を A として次の 2 次元場の支配方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \sigma \left((\nabla\phi)_z + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \tag{19}$$

上式の汎関数 ξ は、

$$\xi = \int_S \frac{1}{2}\nu \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} + \sigma \left((\nabla\phi)_z + \frac{\partial A}{\partial t} \right) AdS \tag{20}$$

式に含まれる電位 ϕ は導体に電圧源が印加されている場合は既知となる ($-\nabla\phi$ が電界に相当する)。
電流源が印加されている場合は電流密度分布が、

$$J = -\sigma \left((\nabla\phi)_z + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \tag{21}$$

であることから、電流源を I_0 とすると、次式から ϕ を定める。

$$\int_S -\sigma \left((\nabla\phi)_z + \frac{\partial A}{\partial t} \right) dS = I_0 \tag{22}$$

領域 S を三角形要素で分割し、

$$A = \{N\}^T \{A\} \tag{23}$$

と補間すると、汎関数 (20) 式は

$$\begin{aligned} \chi = \int_S \frac{1}{2}\nu \left(\{A\}^T \frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\{A\} + \{A\}^T \frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{A\} \right) \\ +\{A\}^T\{N\}\left(\sigma(\nabla\phi)_z + \sigma\{N\}^T\{\dot{A}\} \right) dS \end{aligned} \tag{24}$$

ここで、$\{\dot{A}\} = \dfrac{\partial\{A\}}{\partial t}$ である。
変分 $\delta\chi = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \int_S \nu \left(\{\delta A\}^T \frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\{A\} + \{\delta A\}^T \frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{A\} \right) \\ +\{\delta A\}^T\{N\}\left(\sigma(\nabla\phi)_z + \sigma\{N\}^T\{\dot{A}\} \right) dS = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

δA は任意であるから

$$\begin{aligned} \int_S \nu \frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\{A\} + \nu \frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{A\} \\ +\sigma\{N\}(\nabla\phi)_z + \sigma\{N\}\{N\}^T\{\dot{A}\} dS = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

したがって、

$$[K]\{A\} + [M]\{\dot{A}\} = \{F\} \tag{27}$$

$$[K] = \int_S \nu \frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\{A\} + \nu \frac{\partial\{N\}}{\partial y}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial y}\{A\} dS \tag{28}$$

$$[M] = \int_S \sigma\{N\}\{N\}^T dS \tag{29}$$

$$\{F\} = -\int_S \sigma\{N\}(\nabla\phi)_z dS \tag{30}$$

$\{\dot{A}\}$ は Newmark β 法を適用する。

$$\{\dot{A}\} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\{A\} - \{A\}^{t-1}\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\{\dot{A}\}^{t-1} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\{\ddot{A}\}^{t-1} \tag{31}$$

$\boldsymbol{B}$ は A が分かれば次のように求まる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \nabla \times A\boldsymbol{a}_z \\ &= \frac{\partial A}{\partial y}\boldsymbol{a}_x - \frac{\partial A}{\partial x}\boldsymbol{a}_y\end{aligned} \tag{32}$$

4　まとめ

2 次元過渡渦電流場を解析する $\boldsymbol{A}$-ϕ 法定式化を行った。

5　参考文献

[1] 坪井、内藤（編著),”実践数値電磁界解析法 (日本 AEM 学会：電磁力応用シリーズ 2)”, 第 1 章、第 3 章, 養賢堂,1995