

Plate Bending Theory of Discrete Kirchhoff Triangle (DKT) Elements

ryujimiya

2020年05月19日

1 はじめに

薄板の曲げの理論に Discrete Kirchhoff Theory がある。これは、Kirchhoff 仮定を一般化した Reissner-Mindlin の板理論を基礎とし、節点上だけでオリジナルの Kirchhoff 仮定が成り立つとしたものである。本書では、Discrete Kirchhoff Theory を適用した薄板曲げ要素である DKT 三角形要素、膜の挙動を表す板要素である CST 三角形要素を構成し、それらの重ね合わせによって薄板三角形要素を実現する。

2 板の曲げ理論

Reissner-Mindlin の plate theory は Kirchhoff の仮定 (Kirchhoff hypothesis) を一般化したもので、

”変形前中立面に垂直だった直線は変形後も直線であるが、その直線は変形後の中立面に垂直である必要はない”

*中立面 - middle surface

この仮定は断面のせん断ひずみを含むことを許している。

Reissner-Mindlin の仮定では、点 (x,y,z) における変形は、

$$u = z\beta_x(x, y) \quad (1)$$

$$v = z\beta_y(x, y) \quad (2)$$

$$w = w(x, y) \quad (3)$$

変形前に x - z 平面、 y - z 平面の中立面に垂直だった直線（法線）が変形によって回転した角度を β_x 、 β_y とする。

$$\beta_x = \theta_y \quad (4)$$

$$\beta_y = -\theta_x \quad (5)$$

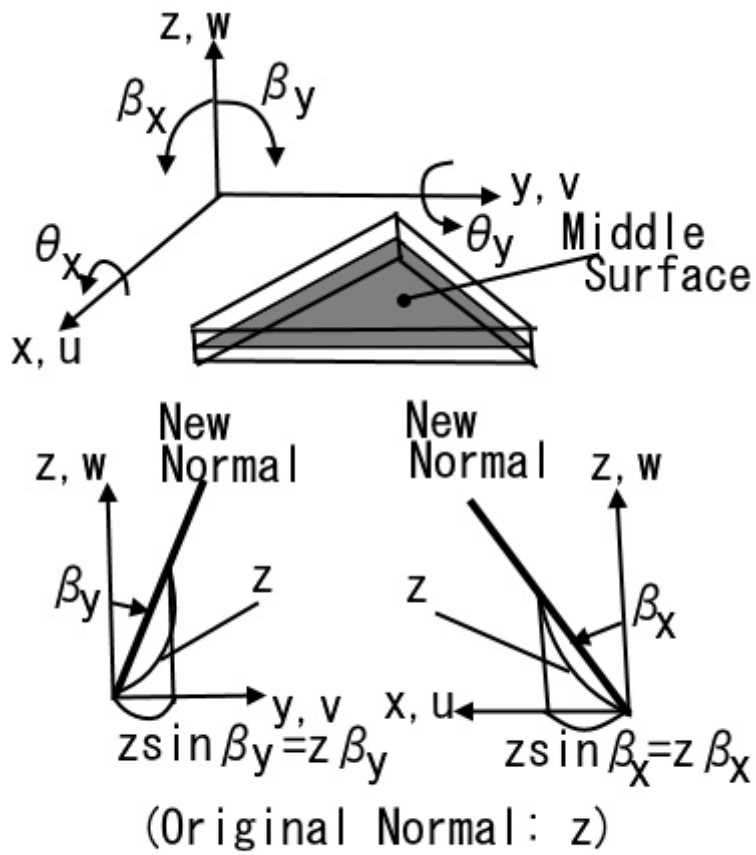


図1 Plate

Kirchhoff の仮定では、

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{6}$$

$$\beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{7}$$

の条件が追加される。

曲げひずみを求める。

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(z\beta_x) = z \frac{\partial \beta_x(x, y)}{\partial x} \quad (8)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(z\beta_y) = z \frac{\partial \beta_y(x, y)}{\partial y} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(z\beta_x) + \frac{\partial}{\partial x}(z\beta_y) \\ &= z \left(\frac{\partial \beta_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y(x, y)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

曲げひずみを次のように表記する。

$$\begin{aligned} \epsilon_b &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \\ &= z\kappa \end{aligned} \quad (11)$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

κ は曲率テンソルの 3 成分である。

断面のせん断ひずみを求める。

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(z\beta_x) + \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(z\beta_y) + \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (15)$$

Kirchhoff 板理論では、応力場は平面応力を仮定 ($\sigma_{zz} = 0$) し、曲げ応力とせん断応力の結合はないものとする。

応力-ひずみ関係式は、

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_b = z\mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}\quad (16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}\quad (17)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}\quad (18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{E}\boldsymbol{\gamma}\quad (19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}\quad (20)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{13} & E_{23} \\ E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}\quad (21)$$

E_{ij} ($i, j = 1, \dots, 3$) は 3 次元 elasticity matrix の成分であり、

$$D_{ij} = E_{ij} - \frac{E_{i3}E_{3j}}{E_{33}}\quad (22)$$

ひずみのポテンシャルエネルギー U は、曲げのポテンシャルエネルギー U_b とせん断ポテンシャルエネルギー U_s の和であり、

$$U = U_b + U_s \quad (23)$$

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}_b^T \boldsymbol{\epsilon}_b dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}_b^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_b dV \\ &\quad (\mathbf{D}^T = \mathbf{D} \text{ を用いた}) \\ &= \frac{1}{2} \int_V z^2 \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa} dA \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{D}_b = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{D}(z) z^2 dz \quad (25)$$

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}_s^T \boldsymbol{\gamma} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\gamma} dV \\ &\quad (\mathbf{E}^T = \mathbf{E} \text{ を用いた}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma} dA \quad (26)$$

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{E}(z) dz \mathbf{k} \quad (27)$$

(27) 式で \mathbf{k} が付加されている。 \mathbf{k} はせん断補正係数である。 A は中立面の面積であり、 $dA = dx dy$ である。

等方性平板の場合、平面応力場 $\sigma_{zz} = 0$ を仮定すると、

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

これを (25) 式、(27) 式に代入して \mathbf{D}_b 、 \mathbf{D}_s を求めると、

$$\mathbf{D}_b = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \mathbf{D} = \frac{h^3}{12} \mathbf{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \mathbf{E} = kh \mathbf{E} = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$k = \frac{5}{6} \quad (32)$$

U_b 、 U_s を求めると、

$$\begin{aligned}
U_b &= \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{b11} & D_{b12} & 0 \\ D_{b12} & D_{b22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{b33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{bmatrix} dA \\
&= \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{b11}\kappa_1 + D_{b12}\kappa_2 \\ D_{b12}\kappa_1 + D_{b22}\kappa_2 \\ D_{b33}\kappa_3 \end{bmatrix} dA \\
&= \frac{1}{2} \int_A \left\{ \kappa_1(D_{b11}\kappa_1 + D_{b12}\kappa_2) + \kappa_2(D_{b12}\kappa_1 + D_{b22}\kappa_2) + D_{b33}\kappa_3^2 \right\} dA \\
&= \frac{1}{2} \int_A \left(D_{b11}\kappa_1^2 + 2D_{b12}\kappa_1\kappa_2 + D_{b22}\kappa_2^2 + D_{b33}\kappa_3^2 \right) dA \\
&= \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial\beta_x}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial\beta_x}{\partial x} \frac{\partial\beta_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial\beta_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y} + \frac{\partial\beta_y}{\partial x} \right)^2 \right\} dA \quad (33) \\
U_s &= \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} dA \\
&= \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}\gamma_{xz} \\ E_{22}\gamma_{yz} \end{bmatrix} dA \\
&= \frac{1}{2} \int_A (E_{11}\gamma_{xz}^2 + E_{22}\gamma_{yz}^2) dA \\
&= \frac{1}{2} \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right)^2 \right\} dA \quad (34)
\end{aligned}$$

曲げモーメント M とせん断力 Q は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \\
&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz \\
&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} z dz \\
&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \mathbf{D} dz \boldsymbol{\kappa} \\
&= \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa}
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma}_s dz \mathbf{k} \\
&= \mathbf{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{E} \boldsymbol{\gamma} dz \mathbf{k} \\
&= \mathbf{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{E} dz \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} \\
&= \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}
\end{aligned} \tag{36}$$

3 曲げ要素 (bending element) — Discrete Kirchhoff Theory(DKT) 三角形要素

3.1 仮定

薄板に対しては断面のせん断ひずみは無視できるので U_s は無視できる。
したがって U_b のみの式を出発点とする。

$$U = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa} dA \tag{37}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 \right\} dA \tag{38}$$

(38) 式には β_x 、 β_y の 1 階微分しか含まれないので容易に補間できる。ただ、 β_x 、 β_y と w の関係を満たす必要があるので次の点を考慮に入れる。

- (a) 三角形要素は 9 自由度、つまり 3 節点の変位 w 、回転 θ_x 、 θ_y を持つ。
- (b) 薄板 Kirchhoff 解を求めると、節点の回転角は、

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{39}$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{40}$$

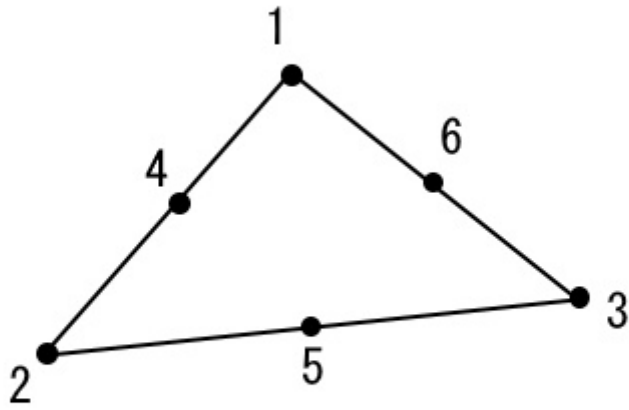


図2 三角形二次要素

(c) 要素は Kirchhoff 板理論に支配された薄板をモデリングするので、Kirchhoff 板理論仮定をどの離散化点に対しても課することができる。

(d) 回転 β_x 、 β_y の適合性（要素間で連続）を失うべきではない。

DKT 要素を構成するに際して次の [1]-[4] の仮定を満たすとする。

[1] β_x 、 β_y は 2 次多項式で表されるとする。

$$\beta_x = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{xi} \quad (41)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{yi} \quad (42)$$

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \quad (43)$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1) \quad (44)$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1) \quad (45)$$

$$N_4 = 4L_1L_2 \quad (46)$$

$$N_5 = 4L_2L_3 \quad (47)$$

$$N_6 = 4L_3L_1 \quad (48)$$

[2] Kirchhoff 仮定を適用して、断面せん断ひずみを消去する。
 頂点節点 1,2,3 では、

$$\gamma = \begin{bmatrix} \beta_{xk} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_{yk} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (49)$$

中点節点 4,5,6 では、

$$\beta_{sd} + \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_d = 0 \quad (d = 4, 5, 6) \quad (50)$$

[3] 回転が 2 次多項式補間されていることから、Kirchhoff 仮定の下では変位 w は 3 次多項式になる。3 次補間するには 4 つの条件があればよい。三角形の頂点の値から辺の中点における値を求めたいので、4 つの条件を辺の両端における値とその微分とする。

頂点 a と頂点 b の中点を d、辺番号を c とする。

a	b	辺 c	中点 d
1	2	3	4
2	3	1	5
3	1	2	6

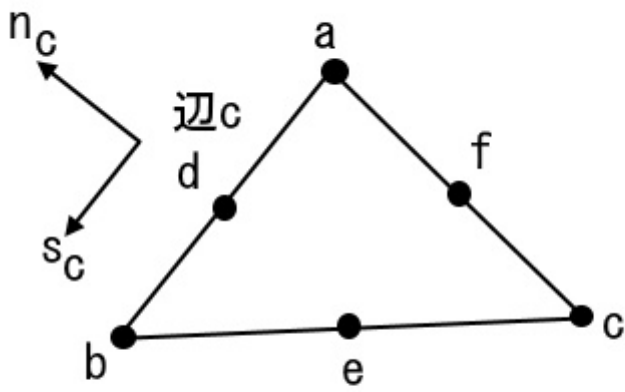


図3 三角形要素の辺 c

頂点 a で 0、頂点 b で l_c (辺 c の長さ) となる辺 c 上の座標 s を用いて w の辺 c における値 $\bar{w}_c(s)$ を表す。

$$\bar{w}_c(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 \quad (51)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_c(s)}{\partial s} = \alpha_1 + 2\alpha_2 s + 3\alpha_3 s^2 \quad (52)$$

両端の条件は、

$$\bar{w}_c(0) = w_a \quad (53)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_c(0)}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_a \quad (54)$$

$$\bar{w}_c(l_c) = w_b \quad (55)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_c(l_c)}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_b \quad (56)$$

(53) 式の条件

$$\begin{aligned} \bar{w}_c(0) = \alpha_0 &= w_a \\ \alpha_0 &= w_a \end{aligned} \quad (57)$$

(54) 式の条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_c(0)}{\partial s} = \alpha_1 &= \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_a \\ \alpha_1 &= \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_a \end{aligned} \quad (58)$$

(55)、(56) 式の条件

$$\begin{aligned} \bar{w}_c(l_c) = \alpha_0 + \alpha_1 l_c + \alpha_2 l_c^2 + \alpha_3 l_c^3 &= w_b \\ \frac{\partial \bar{w}_c(l_c)}{\partial s} = \alpha_1 + 2\alpha_2 l_c + 3\alpha_3 l_c^2 &= \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_b \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{bmatrix} l_c^2 & l_c^3 \\ 2l_c & 3l_c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_b - \alpha_0 - \alpha_1 l_c \\ \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_b - \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

これを解くと、

$$\alpha_2 = -\frac{3}{l_c^2} w_a + \frac{3}{l_c^2} w_b - \frac{2}{l_c} \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_a - \frac{1}{l_c} \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_b \quad (61)$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{l_c^3} w_a - \frac{2}{l_c^3} w_b + \frac{1}{l_c^2} \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_a + \frac{1}{l_c^2} \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_b \quad (62)$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が求まったので (51) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\bar{w}_c(s) &= w_a + \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_a s + \left(-\frac{3}{l_c^2}w_a + \frac{3}{l_c^2}w_b - \frac{2}{l_c} \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_a - \frac{1}{l_c} \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_b\right) s^2 + \left(\frac{2}{l_c^3}w_a - \frac{2}{l_c^3}w_b + \frac{1}{l_c^2} \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_a + \frac{1}{l_c^2} \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_b\right) s^3 \\ &= \left(1 - \frac{3}{l_c^2}s^2 + \frac{2}{l_c^3}s^3\right) w_a + \left(\frac{3}{l_c^2}s^2 - \frac{2}{l_c^3}s^3\right) w_b + \left(s - \frac{2}{l_c}s^2 + \frac{1}{l_c^2}s^3\right) \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_a + \left(-\frac{1}{l_c}s^2 + \frac{1}{l_c^2}s^3\right) \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_b\end{aligned}\quad (63)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_c(s)}{\partial s} = \left(-\frac{6}{l_c^2}s + \frac{6}{l_c^3}s^2\right) w_a + \left(\frac{6}{l_c^2}s - \frac{6}{l_c^3}s^2\right) w_b + \left(1 - \frac{4}{l_c}s + \frac{3}{l_c^2}s^2\right) \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_a + \left(-\frac{2}{l_c}s + \frac{3}{l_c^2}s^2\right) \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_b\quad (64)$$

中点 d の辺方向微分を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s}\Big|_d &= \frac{\partial \bar{w}_c(\frac{l_c}{2})}{\partial s} \\ &= -\frac{3}{2l_c}w_a + \frac{3}{2l_c}w_b - \frac{1}{4} \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_a - \frac{1}{4} \frac{\partial w}{\partial s}\Big|_b\end{aligned}\quad (65)$$

[4] 辺上の辺方向回転角 β_n は線形補間されるとする。

中点 4,5,6 つまり、中点 d(頂点 a-頂点 b 間の辺の中点) において、

$$\beta_{nd} = \frac{1}{2}(\beta_{na} + \beta_{nb}) \quad (d = 4, 5, 6)\quad (66)$$

[1] - [4] の仮定の下、

w は辺上で 3 次多項式なので $\frac{\partial w}{\partial s}$ は 2 次多項式、 β_s も 2 次多項式。

$\frac{\partial w}{\partial s}$ と β_s は辺に沿う 3 点で一致するので、すべての境界 $\partial A = \text{辺 } a + \text{辺 } b + \text{辺 } c$ で、

$$\gamma_s = \beta_s + \frac{\partial w}{\partial s} = 0\quad (67)$$

(Kirchhoff 仮定) が満たされる。

3.2 節点自由度と形状関数

β_x, β_y を節点自由度

$$\mathbf{U} = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}]^T\quad (68)$$

を用いて、

$$\beta_x = \mathbf{H}_x^T \mathbf{U}\quad (69)$$

$$\beta_y = \mathbf{H}_y^T \mathbf{U}\quad (70)$$

と補間したい。

まず、辺 c(頂点 a-b 間) 上では、

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_c & -s_c \\ s_c & c_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{bmatrix} \quad (71)$$

が成り立つ。さらに、

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\beta_x = -\theta_y \quad (72)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\beta_y = \theta_x \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \\ \frac{\partial w}{\partial s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_c & s_c \\ -s_c & c_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_c & s_c \\ -s_c & c_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta_y \\ \theta_x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -c_c & s_c \\ s_c & c_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_c & -c_c \\ c_c & s_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_c & s_c \\ s_c & -c_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (74)$$

ここに、

$$c_c = \cos(\mathbf{e}_x, \mathbf{n}_c) = -\frac{y_{ab}}{l_c} \quad (75)$$

$$s_c = \sin(\mathbf{e}_x, \mathbf{n}_c) = \frac{x_{ab}}{l_c} \quad (76)$$

$$l_c = \sqrt{x_{ab}^2 + y_{ab}^2} \quad (77)$$

$$x_{ab} = x_a - x_b \quad (78)$$

$$y_{ab} = y_a - y_b \quad (79)$$

[4] の仮定の (66) 式

$$\beta_{nd} = \frac{1}{2}(\beta_{na} + \beta_{nb}) \quad (80)$$

ここで、

$$\beta_n = -\frac{\partial w}{\partial n} \quad (81)$$

より、

$$\begin{aligned}
\beta_{nd} &= \frac{1}{2} \left(- \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_a - \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_b \right) \\
&= - \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_a + \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_b \right) \\
&= - \frac{1}{2} (s_c \theta_{xa} - c_c \theta_{ya} + s_c \theta_{xb} - c_c \theta_{yb}) \\
&\quad ((74) \text{ 式を用いた})
\end{aligned} \tag{82}$$

[2] の仮定の (50) 式、[3] の仮定の (65) 式より、

$$\begin{aligned}
\beta_{sd} &= - \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_d \\
&= \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} w_a - \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} w_b + \frac{1}{4} \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_a + \frac{1}{4} \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_b \\
&= \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} w_a - \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} w_b + \frac{1}{4} (c_c \theta_{xa} + s_c \theta_{ya}) + \frac{1}{4} (c_c \theta_{xb} + s_c \theta_{yb})
\end{aligned} \tag{83}$$

(82) 式 β_{nd} 、(83) 式 β_{sd} が求まったので (71) 式より β_{xd} 、 β_{yd} を求めることができる。

$$\beta_{xd} = c_c \beta_{nd} - s_c \beta_{sd} \tag{84}$$

$$\beta_{yd} = s_c \beta_{nd} + c_c \beta_{sd} \tag{85}$$

(82) 式 β_{nd} 、(83) 式 β_{sd} を代入すると、

$$\begin{aligned}
\beta_{xd} &= c_c \left[- \frac{1}{2} (s_c \theta_{xa} - c_c \theta_{ya} + s_c \theta_{xb} - c_c \theta_{yb}) \right] - s_c \left[\frac{3}{2} \frac{1}{l_c} w_a - \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} w_b + \frac{1}{4} (c_c \theta_{xa} + s_c \theta_{ya}) + \frac{1}{4} (c_c \theta_{xb} + s_c \theta_{yb}) \right] \\
&= - \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} s_c w_a + \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} s_c w_b - \frac{3}{4} c_c s_c \theta_{xa} + \left(\frac{1}{2} c_c^2 - \frac{1}{4} s_c^2 \right) \theta_{ya} - \frac{3}{4} c_c s_c \theta_{xb} + \left(\frac{1}{2} c_c^2 - \frac{1}{4} s_c^2 \right) \theta_{yb}
\end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{yd} &= s_c \left[- \frac{1}{2} (s_c \theta_{xa} - c_c \theta_{ya} + s_c \theta_{xb} - c_c \theta_{yb}) \right] + c_c \left[\frac{3}{2} \frac{1}{l_c} w_a - \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} w_b + \frac{1}{4} (c_c \theta_{xa} + s_c \theta_{ya}) + \frac{1}{4} (c_c \theta_{xb} + s_c \theta_{yb}) \right] \\
&= \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} c_c w_a - \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} c_c w_b + \left(- \frac{1}{2} s_c^2 + \frac{1}{4} c_c^2 \right) \theta_{xa} + \frac{3}{4} c_c s_c \theta_{ya} + \left(- \frac{1}{2} s_c^2 + \frac{1}{4} c_c^2 \right) \theta_{xb} + \frac{3}{4} c_c s_c \theta_{yb}
\end{aligned} \tag{87}$$

[1](41)、(42) 式

$$\begin{aligned}
\beta_x &= \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{xi} \\
&= \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{xi} + \sum_{i=4}^6 N_i \beta_{xi} \\
&= \sum_{i=1}^3 N_i \theta_{yi} + \sum_{i=4}^6 N_i \beta_{xi} \tag{88} \\
&\quad (\beta_x = \theta_y \text{ (72) 式を用いた})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_y &= \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{yi} \\
&= \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{yi} + \sum_{i=4}^6 N_i \beta_{yi} \\
&= -\sum_{i=1}^3 N_i \theta_{xi} + \sum_{i=4}^6 N_i \beta_{yi} \tag{89} \\
&\quad (\beta_y = -\theta_x \text{ (73) 式を用いた})
\end{aligned}$$

$$\tag{90}$$

上式の $i = 4, 5, 6$ の β_{xi} 、 β_{yi} に先ほど求めた (86)、(87) 式を代入する。

$$\begin{aligned}
\beta_x &= N_a \theta_{ya} + N_b \theta_{yb} + N_c \theta_{yc} \\
&+ N_d \left[-\frac{31}{2l_c} s_c w_a + \frac{31}{2l_c} s_c w_b - \frac{3}{4} c_c s_c \theta_{xa} + \left(\frac{1}{2} c_c^2 - \frac{1}{4} s_c^2 \right) \theta_{ya} - \frac{3}{4} c_c s_c \theta_{xb} + \left(\frac{1}{2} c_c^2 - \frac{1}{4} s_c^2 \right) \theta_{yb} \right] \\
&+ N_e \left[-\frac{31}{2l_a} s_a w_b + \frac{31}{2l_a} s_a w_a - \frac{3}{4} c_a s_a \theta_{xb} + \left(\frac{1}{2} c_a^2 - \frac{1}{4} s_a^2 \right) \theta_{yb} - \frac{3}{4} c_a s_a \theta_{xc} + \left(\frac{1}{2} c_a^2 - \frac{1}{4} s_a^2 \right) \theta_{yc} \right] \\
&+ N_f \left[-\frac{31}{2l_b} s_b w_c + \frac{31}{2l_b} s_b w_a - \frac{3}{4} c_b s_b \theta_{xc} + \left(\frac{1}{2} c_b^2 - \frac{1}{4} s_b^2 \right) \theta_{yc} - \frac{3}{4} c_b s_b \theta_{xa} + \left(\frac{1}{2} c_b^2 - \frac{1}{4} s_b^2 \right) \theta_{ya} \right] \\
&= \left(-\frac{31}{2l_c} s_c N_d + \frac{31}{2l_b} s_b N_f \right) w_a + \left(\frac{31}{2l_c} s_c N_d - \frac{31}{2l_a} s_a N_e \right) w_b + \left(\frac{31}{2l_a} s_a N_e - \frac{31}{2l_b} s_b N_f \right) w_c \\
&+ \left(-\frac{3}{4} c_c s_c N_d - \frac{3}{4} c_b s_b N_f \right) \theta_{xa} + \left(-\frac{3}{4} c_c s_c N_d - \frac{3}{4} c_a s_a N_e \right) \theta_{xb} + \left(-\frac{3}{4} c_a s_a N_e - \frac{3}{4} c_b s_b N_f \right) \theta_{xc} \\
&+ \left(N_a + \left(\frac{1}{2} c_c^2 - \frac{1}{4} s_c^2 \right) N_d + \left(\frac{1}{2} c_b^2 - \frac{1}{4} s_b^2 \right) N_f \right) \theta_{ya} \\
&+ \left(N_b + \left(\frac{1}{2} c_c^2 - \frac{1}{4} s_c^2 \right) N_d + \left(\frac{1}{2} c_a^2 - \frac{1}{4} s_a^2 \right) N_e \right) \theta_{yb} \\
&+ \left(N_c + \left(\frac{1}{2} c_a^2 - \frac{1}{4} s_a^2 \right) N_e + \left(\frac{1}{2} c_b^2 - \frac{1}{4} s_b^2 \right) N_f \right) \theta_{yc} \tag{91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_y &= -N_a\theta_{xa} - N_b\theta_{xb} - N_c\theta_{xc} \\
&+ N_d \left[\frac{3}{2l_c}c_c w_a - \frac{3}{2l_c}c_c w_b + \left(-\frac{1}{2}s_c^2 + \frac{1}{4}c_c^2 \right) \theta_{xa} + \frac{3}{4}c_c s_c \theta_{ya} + \left(-\frac{1}{2}s_c^2 + \frac{1}{4}c_c^2 \right) \theta_{xb} + \frac{3}{4}c_c s_c \theta_{yb} \right] \\
&+ N_e \left[\frac{3}{2l_a}c_a w_b - \frac{3}{2l_a}c_a w_c + \left(-\frac{1}{2}s_a^2 + \frac{1}{4}c_a^2 \right) \theta_{xb} + \frac{3}{4}c_a s_a \theta_{yb} + \left(-\frac{1}{2}s_a^2 + \frac{1}{4}c_a^2 \right) \theta_{xc} + \frac{3}{4}c_a s_a \theta_{yc} \right] \\
&+ N_f \left[\frac{3}{2l_b}c_b w_c - \frac{3}{2l_b}c_b w_a + \left(-\frac{1}{2}s_b^2 + \frac{1}{4}c_b^2 \right) \theta_{xc} + \frac{3}{4}c_b s_b \theta_{yc} + \left(-\frac{1}{2}s_b^2 + \frac{1}{4}c_b^2 \right) \theta_{xa} + \frac{3}{4}c_b s_b \theta_{ya} \right] \\
&= \left(\frac{3}{2l_c}c_c N_d - \frac{3}{2l_b}c_b N_f \right) w_a + \left(-\frac{3}{2l_c}c_c N_d + \frac{3}{2l_a}c_a N_e \right) w_b + \left(-\frac{3}{2l_a}c_a N_e + \frac{3}{2l_b}c_b N_f \right) w_c \\
&+ \left(-N_a + \left(-\frac{1}{2}s_c^2 + \frac{1}{4}c_c^2 \right) N_d + \left(-\frac{1}{2}s_b^2 + \frac{1}{4}c_b^2 \right) N_f \right) \theta_{xa} \\
&+ \left(-N_b + \left(-\frac{1}{2}s_c^2 + \frac{1}{4}c_c^2 \right) N_d + \left(-\frac{1}{2}s_a^2 + \frac{1}{4}c_a^2 \right) N_e \right) \theta_{xb} \\
&+ \left(-N_c + \left(-\frac{1}{2}s_a^2 + \frac{1}{4}c_a^2 \right) N_e + \left(-\frac{1}{2}s_b^2 + \frac{1}{4}c_b^2 \right) N_f \right) \theta_{xc} \\
&+ \left(\frac{3}{4}c_c s_c N_d + \frac{3}{4}c_b s_b N_f \right) \theta_{ya} + \left(\frac{3}{4}c_c s_c N_d + \frac{3}{4}c_a s_a N_e \right) \theta_{yb} + \left(\frac{3}{4}c_a s_a N_e + \frac{3}{4}c_b s_b N_f \right) \theta_{yc} \quad (92)
\end{aligned}$$

節点 a に関する項だけ書くと、

β_x は、

$$\beta_x = H_{xa}^1 w_a + H_{xa}^2 \theta_{xa} + H_{xa}^3 \theta_{ya} \quad (93)$$

$$H_{xa}^1 = -\frac{3}{2l_c}c_c N_d + \frac{3}{2l_b}c_b N_f \quad (94)$$

$$H_{xa}^2 = -\frac{3}{4}c_c s_c N_d - \frac{3}{4}c_b s_b N_f \quad (95)$$

$$H_{xa}^3 = N_a + \left(\frac{1}{2}c_c^2 - \frac{1}{4}s_c^2 \right) N_d + \left(\frac{1}{2}c_b^2 - \frac{1}{4}s_b^2 \right) N_f \quad (96)$$

or

$$H_{xa}^1 = \frac{3}{2}(\hat{a}_d N_d - \hat{a}_f N_f) \quad (97)$$

$$H_{xa}^2 = \hat{b}_d N_d + \hat{b}_f N_f \quad (98)$$

$$H_{xa}^3 = N_a - \hat{c}_d N_d - \hat{c}_f N_f \quad (99)$$

$$\hat{a}_d = -\frac{1}{l_c} s_c = -\frac{1}{l_c^2} x_{ab} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_d &= -\frac{3}{4} c_c s_c \\ &= -\frac{3}{4} \left(-\frac{y_{ab}}{l_c} \right) \frac{x_{ab}}{l_c} \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{l_c^2} x_{ab} y_{ab} \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_d &= \frac{1}{4} s_c^2 - \frac{1}{2} c_c^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x_{ab}}{l_c} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{y_{ab}}{l_c} \right)^2 \\ &= \frac{1}{l_c^2} \left(\frac{1}{4} x_{ab}^2 - \frac{1}{2} y_{ab}^2 \right) \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x &= [H_{x1} \ H_{x2} \ H_{x3} \ H_{x4} \ H_{x5} \ H_{x6} \ H_{x7} \ H_{x8} \ H_{x9}] \\ &= [H_{x1}^1 \ H_{x1}^2 \ H_{x1}^3 \ H_{x2}^1 \ H_{x2}^2 \ H_{x2}^3 \ H_{x3}^1 \ H_{x3}^2 \ H_{x3}^3]^T \\ \mathbf{H}_x &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(\hat{a}_4 N_4 - \hat{a}_6 N_6) \\ \hat{b}_4 N_4 + \hat{b}_6 N_6 \\ N_1 - \hat{c}_4 N_4 - \hat{c}_6 N_6 \\ \frac{3}{2}(\hat{a}_5 N_5 - \hat{a}_4 N_4) \\ \hat{b}_5 N_5 + \hat{b}_4 N_4 \\ N_2 - \hat{c}_5 N_5 - \hat{c}_4 N_4 \\ \frac{3}{2}(\hat{a}_6 N_6 - \hat{a}_5 N_5) \\ \hat{b}_6 N_6 + \hat{b}_5 N_5 \\ N_3 - \hat{c}_6 N_6 - \hat{c}_5 N_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (103)$$

β_y は、

$$\beta_y = H_{ya}^1 w_a + H_{ya}^2 \theta_{xa} + H_{ya}^3 \theta_{ya} \quad (104)$$

$$H_{ya}^1 = \frac{3}{2} \frac{1}{l_c} c_c N_d - \frac{3}{2} \frac{1}{l_b} c_b N_f \quad (105)$$

$$H_{ya}^2 = -N_a + \left(-\frac{1}{2} s_c^2 + \frac{1}{4} c_c^2 \right) N_d + \left(-\frac{1}{2} s_b^2 + \frac{1}{4} c_b^2 \right) N_f \quad (106)$$

$$H_{ya}^3 = \frac{3}{4} c_c s_c N_d + \frac{3}{4} c_b s_b N_f \quad (107)$$

or

$$H_{ya}^1 = \frac{3}{2}(\hat{d}_d N_d - \hat{d}_f N_f) \quad (108)$$

$$H_{ya}^2 = -N_a + \hat{e}_d N_d + \hat{e}_f N_f \quad (109)$$

$$H_{ya}^3 = -\hat{b}_d N_d - \hat{b}_f N_f \quad (110)$$

$$\hat{b}_d = (101) \text{ 式} \quad (111)$$

$$\hat{d}_d = \frac{1}{l_c} c_c = \frac{1}{l_c} \left(-\frac{y_{ab}}{l_c} \right) = -\frac{1}{l_c^2} y_{ab} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_d &= -\frac{1}{2} s_c^2 + \frac{1}{4} c_c^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x_{ab}}{l_c} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(-\frac{y_{ab}}{l_c} \right)^2 \\ &= \frac{1}{l_c^2} \left(-\frac{1}{2} x_{ab}^2 + \frac{1}{4} y_{ab}^2 \right) \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_y &= [H_{y1} \ H_{y2} \ H_{y3} \ H_{y4} \ H_{y5} \ H_{y6} \ H_{y7} \ H_{y8} \ H_{y9}]^T \\ &= [H_{y1}^1 \ H_{y1}^2 \ H_{y1}^3 \ H_{y2}^1 \ H_{y2}^2 \ H_{y2}^3 \ H_{y3}^1 \ H_{y3}^2 \ H_{y3}^3]^T \\ \mathbf{H}_y &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(\hat{d}_4 N_4 - \hat{d}_6 N_6) \\ -N_1 + \hat{e}_4 N_4 + \hat{e}_6 N_6 \\ -\hat{b}_4 N_4 - \hat{b}_6 N_6 \\ \frac{3}{2}(\hat{d}_5 N_5 - \hat{d}_4 N_4) \\ -N_2 + \hat{e}_5 N_5 + \hat{e}_4 N_4 \\ -\hat{b}_5 N_5 - \hat{b}_4 N_4 \\ \frac{3}{2}(\hat{d}_6 N_6 - \hat{d}_5 N_5) \\ -N_3 + \hat{e}_6 N_6 + \hat{e}_5 N_5 \\ -\hat{b}_6 N_6 - \hat{b}_5 N_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (114)$$

3.3 形状関数の微分

$$N_a = L_a(2L_a - 1) \quad (115)$$

$$\frac{\partial N_a}{\partial x} = b_a(4L_a - 1) \quad (116)$$

$$\frac{\partial N_a}{\partial y} = c_a(4L_a - 1) \quad (117)$$

$$b_a = \frac{1}{2A} \bar{b}_a \quad (118)$$

$$c_a = \frac{1}{2A} \bar{c}_a \quad (119)$$

$$\bar{b}_a = y_b - y_c = y_{bc} \quad (120)$$

$$\bar{c}_a = x_c - x_b = x_{cb} \quad (121)$$

$$N_d = 4L_a L_b \quad (122)$$

$$\frac{\partial N_d}{\partial x} = 4(b_a L_b + b_b L_a) \quad (123)$$

$$\frac{\partial N_d}{\partial y} = 4(c_a L_b + c_b L_a) \quad (124)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H_{xa}^1}{\partial x} = \frac{3}{2} (\hat{a}_d \frac{\partial N_d}{\partial x} - \hat{a}_f \frac{\partial N_f}{\partial x}) \quad (125)$$

$$\frac{\partial H_{xa}^2}{\partial x} = \hat{b}_d \frac{\partial N_d}{\partial x} + \hat{b}_f \frac{\partial N_f}{\partial x} \quad (126)$$

$$\frac{\partial H_{xa}^3}{\partial x} = \frac{\partial N_a}{\partial x} - \hat{c}_d \frac{\partial N_d}{\partial x} - \hat{c}_f \frac{\partial N_f}{\partial x} \quad (127)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H_{xa}^1}{\partial y} = \frac{3}{2} (\hat{a}_d \frac{\partial N_d}{\partial y} - \hat{a}_f \frac{\partial N_f}{\partial y}) \quad (128)$$

$$\frac{\partial H_{xa}^2}{\partial y} = \hat{b}_d \frac{\partial N_d}{\partial y} + \hat{b}_f \frac{\partial N_f}{\partial y} \quad (129)$$

$$\frac{\partial H_{xa}^3}{\partial y} = \frac{\partial N_a}{\partial y} - \hat{c}_d \frac{\partial N_d}{\partial y} - \hat{c}_f \frac{\partial N_f}{\partial y} \quad (130)$$

ここに、

$$\frac{\partial N_d}{\partial x} = 4(b_a L_b + b_b L_a) \quad (131)$$

$$\frac{\partial N_f}{\partial x} = 4(b_c L_a + b_a L_c) \quad (132)$$

$$\frac{\partial N_a}{\partial x} = b_a(4L_a - 1) \quad (133)$$

$$\frac{\partial N_d}{\partial y} = 4(c_a L_b + c_b L_a) \quad (134)$$

$$\frac{\partial N_f}{\partial y} = 4(c_c L_a + c_a L_c) \quad (135)$$

$$\frac{\partial N_a}{\partial y} = c_a(4L_a - 1) \quad (136)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H_{ya}^1}{\partial x} = \frac{3}{2}(\hat{d}_d \frac{\partial N_d}{\partial x} - \hat{d}_f \frac{\partial N_f}{\partial x}) \quad (137)$$

$$\frac{\partial H_{ya}^2}{\partial x} = -\frac{\partial N_a}{\partial x} + \hat{e}_d \frac{\partial N_d}{\partial x} + \hat{e}_f \frac{\partial N_f}{\partial x} \quad (138)$$

$$\frac{\partial H_{ya}^3}{\partial x} = -\hat{b}_d \frac{\partial N_d}{\partial x} - \hat{b}_f \frac{\partial N_f}{\partial x} \quad (139)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H_{ya}^1}{\partial y} = \frac{3}{2}(\hat{d}_d \frac{\partial N_d}{\partial y} - \hat{d}_f \frac{\partial N_f}{\partial y}) \quad (140)$$

$$\frac{\partial H_{ya}^2}{\partial y} = -\frac{\partial N_a}{\partial y} + \hat{e}_d \frac{\partial N_d}{\partial y} + \hat{e}_f \frac{\partial N_f}{\partial y} \quad (141)$$

$$\frac{\partial H_{ya}^3}{\partial y} = -\hat{b}_d \frac{\partial N_d}{\partial y} - \hat{b}_f \frac{\partial N_f}{\partial y} \quad (142)$$

3.4 剛性マトリクス

(37) 式

$$U = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa} dA \quad (143)$$

(12) 式と (69)、(70) 式より、

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\kappa} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}_x^T}{\partial x} \mathbf{U} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_y^T}{\partial y} \mathbf{U} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_x^T}{\partial y} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{H}_y^T}{\partial x} \mathbf{U} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}_x^T}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_y^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_x^T}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_y^T}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{U} \\
 &= \mathbf{B} \mathbf{U} \tag{144}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}_x^T}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_y^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_x^T}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_y^T}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{145}$$

(144) 式を (143) 式に代入する。

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B} dA \mathbf{U} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \tag{146}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B} dA \tag{147}$$

\mathbf{K} の積分は 2 次項しか含まれないので 3 点 Gauss 積分で充分である。

4 膜要素 (membrane element) — CST(Constant Strain Triangular, 定ひずみ三角形) 要素

CST 要素は三角形の 3 つの頂点を節点とし 1 節点につき x 、 y 方向の変位は u 、 v の 2 自由度を持つ。

$$\mathbf{U} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T \tag{148}$$

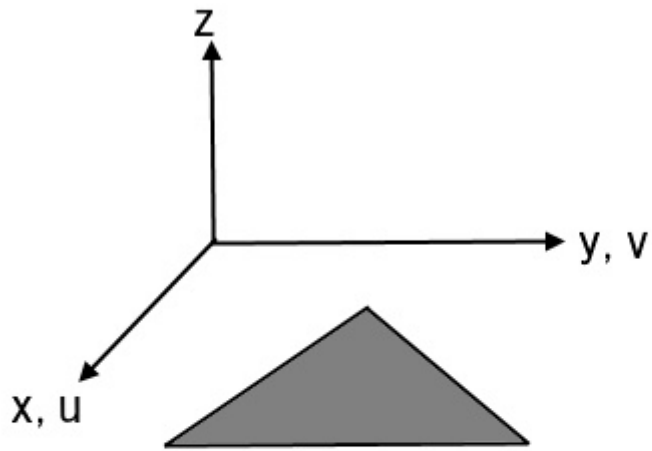


図4 CST要素

u, v は線形補間する。

$$u = [N_1 \ 0 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ 0] \mathbf{U} = \mathbf{N}_x^T \mathbf{U} \quad (149)$$

$$v = [0 \ N_1 \ 0 \ N_2 \ 0 \ N_3] \mathbf{U} = \mathbf{N}_y^T \mathbf{U} \quad (150)$$

$$N_1 = L_1 \quad (151)$$

$$N_2 = L_2 \quad (152)$$

$$N_3 = L_3 \quad (153)$$

ひずみを求める。

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \quad 0 \right] \mathbf{U}\end{aligned}\tag{154}$$

$$= [b_1 \quad 0 \quad b_2 \quad 0 \quad b_3 \quad 0] \mathbf{U}\tag{155}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left[0 \quad \frac{\partial N_1}{\partial y} \quad 0 \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} \quad 0 \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} \right] \mathbf{U}\end{aligned}\tag{156}$$

$$= [0 \quad c_1 \quad 0 \quad c_2 \quad 0 \quad c_3] \mathbf{U}\tag{157}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left[\frac{\partial N_1}{\partial y} \quad 0 \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} \quad 0 \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} \quad 0 \right] \mathbf{U} + \left[0 \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \right] \mathbf{U}\end{aligned}\tag{158}$$

$$= \left[\frac{\partial N_1}{\partial y} \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \right] \mathbf{U}\tag{159}$$

$$= [c_1 \quad b_1 \quad c_2 \quad b_2 \quad c_3 \quad b_3] \mathbf{U}\tag{160}$$

ひずみベクトルで書くと、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon} &= \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{U}\end{aligned}\tag{161}$$

$$= \mathbf{B} \mathbf{U}\tag{162}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}\tag{163}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}\tag{164}$$

等方性平板で平面応力場を仮定すると、

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}\tag{165}$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}\tag{166}$$

ひずみのポテンシャルエネルギーは、

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV \\
 &\quad (\mathbf{C}^T = \mathbf{C} \text{ を用いた}) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{U} \tag{167}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T h \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA \mathbf{U} \tag{168}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \tag{169}$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV = h \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA \tag{170}$$

h は膜の厚さである。

CST 要素では (164) 式より \mathbf{B} が一定なので、

$$\mathbf{K} = h \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \tag{171}$$

5 薄板 (Flat Plate) 要素

CST 要素と DKT 要素の重ね合わせで膜 (membrane) の挙動と曲げ (bending) の挙動を表現する。

全自由度は 18 で 1 節点につき 6 自由度 $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ を持つ。

CST からは u, v の 2 自由度、DKT からは w, θ_x, θ_y の 3 自由度が導入される。残る 1 自由度 θ_z は新たに定める。

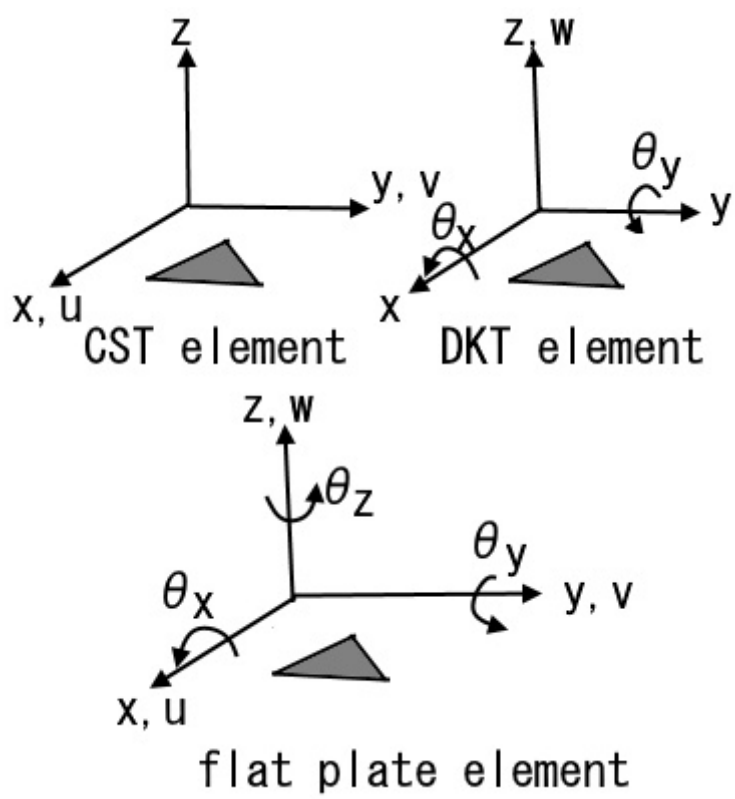


图 5 薄板要素

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} & \theta_{z3} \end{bmatrix}^T \quad (172)$$

CST 要素 (membrane)

$$u = \mathbf{N}_x^T \mathbf{U}_m \quad (173)$$

$$v = \mathbf{N}_y^T \mathbf{U}_m \quad (174)$$

$$\mathbf{U}_m = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3]^T \quad (175)$$

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{m11} & \mathbf{K}_{m12} & \mathbf{K}_{m13} \\ & \mathbf{K}_{m22} & \mathbf{K}_{m23} \\ & & \mathbf{K}_{m33} \end{bmatrix} \quad (176)$$

$$\mathbf{K}_{mij} = \left[\right]_{2 \times 2} \quad (177)$$

\mathbf{K}_m は (171) 式である。

DKT 要素 (bending)

$$\beta_x = \mathbf{H}_x^T \mathbf{U}_b \quad (178)$$

$$\beta_y = \mathbf{H}_y^T \mathbf{U}_b \quad (179)$$

$$\mathbf{U}_b = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}]^T \quad (180)$$

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{b11} & \mathbf{K}_{b12} & \mathbf{K}_{b13} \\ & \mathbf{K}_{b22} & \mathbf{K}_{b23} \\ & & \mathbf{K}_{b33} \end{bmatrix} \quad (181)$$

$$\mathbf{K}_{bij} = \left[\right]_{3 \times 3} \quad (182)$$

\mathbf{K}_b は (147) 式である。

重ね合わせると、

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{m11} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{m12} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{m13} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{b11} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{b12} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{b13} & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{m21} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{m22} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{m23} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{b21} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{b22} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{b23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{m31} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{m32} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{m33} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{b31} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{b32} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{b33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix} \quad (183)$$

新たに現れた f は θ_z に関連するひずみエネルギーの寄与を表す。

θ_z は”drilling degree of freedom”と呼ばれる。

f は”fictitious stiffness value”で、

$$f_p = 10^{-3} \max(K_{ij}^p) \quad (p = 1, 2, 3) \quad (184)$$

K_{ij}^p は、節点 p に関する項を抽出した小行列 \mathbf{K}^p の i,j 要素である。

$\max(K_{ij}^p)$ は通常対角項のみを調べれば充分と思われ、

$$f_p = 10^{-3} \max(K_{ii}^p) \quad (185)$$

としてよい。なお、対角項は $K_{ii}^p > 0$ である。

6 動的解析

運動エネルギーの変分 δT

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_V \rho \ddot{u} \delta u dV \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \rho \ddot{u} \delta u dz dA \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \left[\rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) \right. \\ &\quad \left. + \rho (z \ddot{u} \delta \beta_x + z \ddot{v} \delta \beta_y + z \ddot{\beta}_x \delta u + z \ddot{\beta}_y \delta v) \right. \\ &\quad \left. + \rho (z^2 \ddot{\beta}_x \delta \beta_x + z^2 \ddot{\beta}_y \delta \beta_y) \right] dz dA \end{aligned} \quad (186)$$

(曲げに関して、 $u = z\beta_x$, $v = z\beta_y$, $w = w$ の関係を用いた)

$$\begin{aligned} &= \int_A \left[\rho_m (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) \right. \\ &\quad \left. + \rho_{mb} (\ddot{u} \delta \beta_x + \ddot{v} \delta \beta_y + \ddot{\beta}_x \delta u + \ddot{\beta}_y \delta v) \right. \\ &\quad \left. + \rho_b (\ddot{\beta}_x \delta \beta_x + \ddot{\beta}_y \delta \beta_y) \right] dA \end{aligned} \quad (187)$$

$$\rho_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \quad (188)$$

$$\rho_{mb} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz \quad (189)$$

$$\rho_b = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \quad (190)$$

自由度は、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} & \theta_{z3} \end{bmatrix}^T \quad (191)$$

であった。

補間は次のように行う。

$$u = \mathbf{N}_x^T \mathbf{U} \quad (192)$$

$$v = \mathbf{N}_y^T \mathbf{U} \quad (193)$$

$$w = \mathbf{N}_z^T \mathbf{U} \quad (194)$$

$$\beta_x = \mathbf{H}_x^T \mathbf{U} \quad (195)$$

$$\beta_y = \mathbf{H}_y^T \mathbf{U} \quad (196)$$

$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (197)$$

$$\mathbf{N}_y = \begin{bmatrix} 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (198)$$

$$\mathbf{N}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (199)$$

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{x1} & H_{x2} & H_{x3} & 0 \\ 0 & 0 & H_{x4} & H_{x5} & H_{x6} & 0 \\ 0 & 0 & H_{x7} & H_{x8} & H_{x9} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (200)$$

$$\mathbf{H}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{y1} & H_{y2} & H_{y3} & 0 \\ 0 & 0 & H_{y4} & H_{y5} & H_{y6} & 0 \\ 0 & 0 & H_{y7} & H_{y8} & H_{y9} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (201)$$

剛性マトリクスを求めたとき w に関しては内部の補間関数を定義しなかったのが新たに補間している。
 u 、 v には CST 膜要素で用いた形状関数 $N_i (i = 1, 2, 3)$ 、 β_x 、 β_y には DKT 曲げ要素で用いた形状関数
 $H_{xi} (i = 1, \dots, 9)$ 、 $H_{yi} (i = 1, \dots, 9)$ を用いている。
これらを用いれば、

$$\begin{aligned} \delta T = \delta \mathbf{U}^T \int_A & \left[\rho_m (\mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T + \mathbf{N}_y \mathbf{N}_y^T + \mathbf{N}_z \mathbf{N}_z^T) \right. \\ & + \rho_{mb} (\mathbf{H}_x \mathbf{N}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{N}_y^T + \mathbf{N}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{N}_y \mathbf{H}_y^T) \\ & \left. + \rho_b (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) \right] dA \ddot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (202)$$

$$= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (203)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \int_A & \left[\rho_m (\mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T + \mathbf{N}_y \mathbf{N}_y^T + \mathbf{N}_z \mathbf{N}_z^T) \right. \\ & + \rho_{mb} (\mathbf{H}_x \mathbf{N}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{N}_y^T + \mathbf{N}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{N}_y \mathbf{H}_y^T) \\ & \left. + \rho_b (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_x^T + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_y^T) \right] dA \end{aligned} \quad (204)$$

板が均一、or、 $z = 0$ に対して対称ならば、

$$\rho_{mb} = 0 \quad (205)$$

板が均一するとき、

$$\rho_m = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \rho h \quad (206)$$

$$\rho_{mb} = 0 \quad (207)$$

$$\rho_b = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{\rho h^3}{12} \quad (208)$$

と計算できる。

運動方程式は、

$$M\ddot{U} + KU = F \quad (209)$$

7 グローバル座標系への変換

ローカル座標系を xyz 、グローバル座標系を XYZ とする。

ローカル xy 平面上の三角形の頂点 1,2,3 の位置ベクトルは、

$$\mathbf{V}_1 = X_1 \mathbf{e}_X + Y_1 \mathbf{e}_Y + Z_1 \mathbf{e}_Z \quad (210)$$

$$\mathbf{V}_2 = X_2 \mathbf{e}_X + Y_2 \mathbf{e}_Y + Z_2 \mathbf{e}_Z \quad (211)$$

$$\mathbf{V}_3 = X_3 \mathbf{e}_X + Y_3 \mathbf{e}_Y + Z_3 \mathbf{e}_Z \quad (212)$$

次を定義する。

$$X_{kl} = X_k - X_l \quad (213)$$

$$Y_{kl} = Y_k - Y_l \quad (214)$$

$$Z_{kl} = Z_k - Z_l \quad (215)$$

$$l_{kl} = \sqrt{X_{kl}^2 + Y_{kl}^2 + Z_{kl}^2} (= l_{lk}) \quad (216)$$

ローカル x 軸方向ベクトルは点 1 から点 2 に向かうベクトルで、

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = X_{21} \mathbf{e}_X + Y_{21} \mathbf{e}_Y + Z_{21} \mathbf{e}_Z \quad (217)$$

$$|\mathbf{V}_x| = l_{21} \quad (218)$$

ローカル x 軸方向単位ベクトル \mathbf{e}_x は、

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{V}_x}{|\mathbf{V}_x|} = \frac{X_{21}}{l_{21}} \mathbf{e}_X + \frac{Y_{21}}{l_{21}} \mathbf{e}_Y + \frac{Z_{21}}{l_{21}} \mathbf{e}_Z \quad (219)$$

ローカル y 軸方向については、点 1 から点 3 に向かうベクトル \mathbf{V}_r を導入する。

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1 = X_{31} \mathbf{e}_X + Y_{31} \mathbf{e}_Y + Z_{31} \mathbf{e}_Z \quad (220)$$

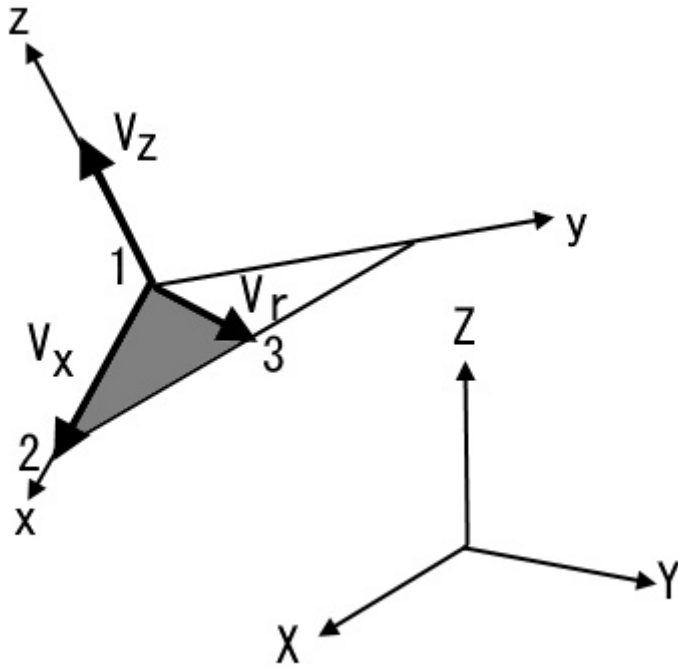


図6 グローバル座標系への変換

\mathbf{V}_x と \mathbf{V}_r によりローカル z 軸に垂直な平面が決まる。

ローカル z 方向ベクトル \mathbf{V}_z は、

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_z &= \mathbf{V}_x \times \mathbf{V}_r \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_X & \mathbf{e}_Y & \mathbf{e}_Z \\ X_{21} & Y_{21} & Z_{21} \\ X_{31} & Y_{31} & Z_{31} \end{vmatrix} \\ &= (Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21})\mathbf{e}_X + (Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21})\mathbf{e}_Y + (X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21})\mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (221)$$

ローカル z 軸方向単位ベクトル \mathbf{e}_z は、

$$\mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{V}_z}{|\mathbf{V}_z|} \quad (222)$$

最後にローカル y 軸方向単位ベクトル \mathbf{e}_y は、

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x \quad (223)$$

ローカル座標系節点値ベクトル \mathbf{U}_l とグローバル座標系節点値ベクトル \mathbf{U}_g の関係は、

$$\mathbf{U}_l = \mathbf{T}\mathbf{U}_g \quad (224)$$

$$\mathbf{U}_l = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad \cdots \quad \theta_{z3}]^T \quad (225)$$

$$\mathbf{U}_g = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6 \quad \cdots \quad U_{18}]^T \quad (226)$$

\mathbf{T} は変換マトリクスで次のように求まる。

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \quad (227)$$

$$l_x = \cos(x, X), \quad m_x = \cos(x, Y), \quad n_x = \cos(x, Z)$$

$$l_y = \cos(y, X), \quad m_y = \cos(y, Y), \quad n_y = \cos(y, Z)$$

$$l_z = \cos(z, X), \quad m_z = \cos(z, Y), \quad n_z = \cos(z, Z) \quad (228)$$

$$\cos(a, B) = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_B \quad (a = x, y, z, \quad B = X, Y, Z) \quad (229)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_x)_X & (\mathbf{e}_x)_Y & (\mathbf{e}_x)_Z \\ (\mathbf{e}_y)_X & (\mathbf{e}_y)_Y & (\mathbf{e}_y)_Z \\ (\mathbf{e}_z)_X & (\mathbf{e}_z)_Y & (\mathbf{e}_z)_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^T \\ \mathbf{e}_y^T \\ \mathbf{e}_z^T \end{bmatrix} \quad (230)$$

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (231)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_p & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_p & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad (232)$$

(233)

この変換マトリクス \mathbf{T} を用いると運動方程式は、

$$\mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{U}}_l + \mathbf{K}_l \mathbf{U}_l = \mathbf{F}_l \quad (234)$$

$$\rightarrow \mathbf{T}^T \mathbf{M}_l \mathbf{T} \ddot{\mathbf{U}}_l + \mathbf{T}^T \mathbf{K}_l \mathbf{T} \mathbf{U}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_l \quad (235)$$

$$\rightarrow \mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{U}}_g + \mathbf{K}_g \mathbf{U}_g = \mathbf{F}_g \quad (236)$$

ここに、

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_l \mathbf{T} \quad (237)$$

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_l \mathbf{T} \quad (238)$$

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_l \quad (239)$$

8 まとめ

Discrete Kirchhoff Theory を適用した薄板曲げ要素である DKT 三角形要素、膜の挙動を表す板要素である CST 三角形要素を構成し、それらの重ね合わせによって薄板三角形要素を実現した。

9 参考文献

[1]Jean-Louis Batoz, Klaus-Jorgen Bathe and Lee-Wing Ho, "A study of three-node triangular plate bending elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, pp.1771-1812,1980

[2]Pedro Torres Fraga, "EFFECT - Efficient Finite Element Code", Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica, 2015

[3]Code_Aster, "Elements of plate: modelings DKT, DST, DKTG and Q4G"