Co-rotational Beam(Frame) Formulation

ryujimiya

2020 年 04 月 09 日

1 はじめに

Euler-Bernoulli 梁や Timoshenko 梁は大きな変位を想定していない。
有限回転のような幾何学的非線形な梁を扱うために、Co-rotational formulation と呼ばれる方法を試す。
Co-rotational formulation では、梁要素の運動を剛体運動と、小さな変形に分離する。
剛体運動にともなう移動と回転をする要素のローカル座標系を定義する。小さな変形はこのローカル座標系で測る。

2 Co-rotional Beam(Frame) の kinematics

節点 1、2 のグローバル座標系 (x, y) の座標を (x_1, y_1)、(x_2, y_2) とする。
グローバル変位ベクトル

$$\boldsymbol{p}_g = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

ローカル変位ベクトル

$$\boldsymbol{p}_l = \begin{bmatrix} \overline{u} & \overline{\theta}_1 & \overline{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

$\boldsymbol{p}_l$ の成分は次より計算できる。

$$\overline{u} = l_n - l_0 \tag{3}$$
$$\overline{\theta}_1 = \theta_1 - \alpha \tag{4}$$
$$\overline{\theta}_2 = \theta_2 - \alpha \tag{5}$$

ここに、l_0、l_n は初期及び現在の要素の長さ

$$l_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{6}$$
$$l_n = \sqrt{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2} \tag{7}$$

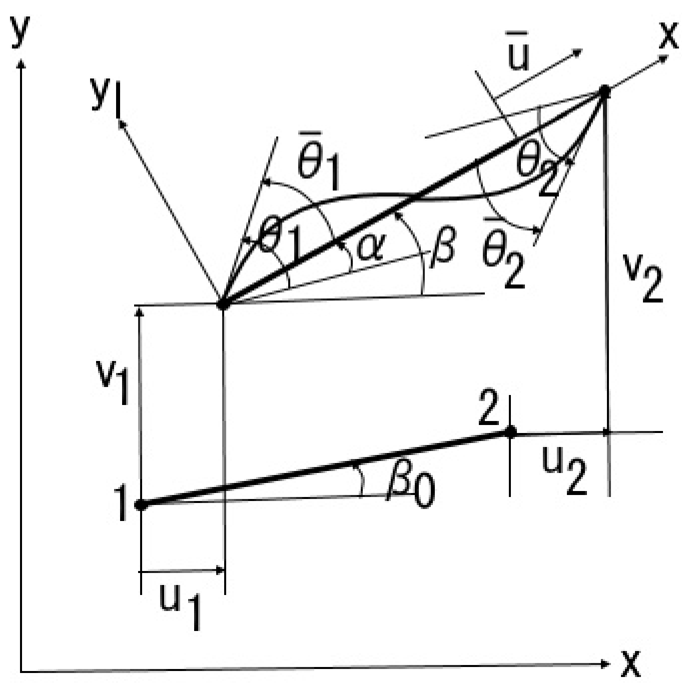

図 1　Co-rotational Beam

α は剛体回転で、

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \beta - \beta_0 & (8)\\
\sin\alpha &= \sin(\beta-\beta_0) = c_0 s - s_0 c & (9)\\
\cos\alpha &= \cos(\beta-\beta_0) = c_0 c + s_0 s & (10)\\
c_0 &= \cos\beta_0 = \frac{1}{l_0}(x_2 - x_1) & (11)\\
s_0 &= \sin\beta_0 = \frac{1}{l_0}(y_2 - y_1) & (12)\\
c &= \cos\beta = \frac{1}{l_n}(x_2 + u_2 - x_1 - u_1) & (13)\\
s &= \sin\beta = \frac{1}{l_n}(y_2 + v_2 - y_1 - v_1) & (14)
\end{aligned}
$$

α を求める。$|\alpha| < \pi$ の範囲を仮定すると、

$$
\begin{aligned}
&\alpha = \sin^{-1}(\sin\alpha) \qquad (\sin\alpha \geq 0 \text{ and } \cos\alpha \geq 0)\\
&\alpha = \cos^{-1}(\cos\alpha) \qquad (\sin\alpha \geq 0 \text{ and } \cos\alpha < 0)\\
&\alpha = \sin^{-1}(\sin\alpha) \qquad (\sin\alpha < 0 \text{ and } \cos\alpha \geq 0)\\
&\alpha = -\cos^{-1}(\cos\alpha) \qquad (\sin\alpha < 0 \text{ and } \cos\alpha < 0) & (15)
\end{aligned}
$$

変位の仮想変位を求める。

$$
\begin{aligned}
\delta\overline{u} &= \delta l_n\\
&= c(\delta u_2 - \delta u_1) + s(\delta v_2 - \delta v_1)\\
&= \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{p}_g & (16)\\
\delta\overline{\theta}_1 &= \delta\theta_1 - \delta\alpha\\
&= \delta\theta_1 - \delta(\beta - \beta_0)\\
&= \delta\theta_1 - \delta\beta & (17)\\
\delta\overline{\theta}_2 &= \delta\theta_2 - \delta\alpha\\
&= \delta\theta_2 - \delta\beta & (18)
\end{aligned}
$$

$\delta\beta$ は (14) 式を微分して、

$$
\cos\beta\delta\beta = -\frac{\delta l_n}{l_n^2}(y_2 + v_2 - y_1 - v_1) + \frac{1}{l_n}(\delta v_2 - \delta v_1)
$$

$\delta\beta$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
\delta\beta &= \frac{1}{cl_n^2}\{(\delta v_2-\delta v_1)l_n-(y_2+v_2-y_1-v_1)\delta l_n\}\\
&= \frac{1}{cl_n^2}\{(\delta v_2-\delta v_1)l_n-sl_n\delta l_n\}\\
&= \frac{1}{cl_n}\{(\delta v_2-\delta v_1)-s\delta l_n\}\\
&= \frac{1}{cl_n}\left[(\delta v_2-\delta v_1)-s\{c(\delta u_2-\delta u_1)+s(\delta v_2-\delta v_1)\}\right]\\
&= \frac{1}{cl_n}\left\{(\delta v_2-\delta v_1)-sc(\delta u_2-\delta u_1)-s^2(\delta v_2-\delta v_1)\right\}\\
&= \frac{1}{cl_n}\left\{(1-s^2)(\delta v_2-\delta v_1)-sc(\delta u_2-\delta u_1)\right\}\\
&= \frac{1}{cl_n}\left\{c^2(\delta v_2-\delta v_1)-sc(\delta u_2-\delta u_1)\right\}\\
&= \frac{1}{l_n}\{c(\delta v_2-\delta v_1)-s(\delta u_2-\delta u_1)\}\\
&= \frac{1}{l_n}\begin{bmatrix} s & -c & 0 & -s & c & 0\end{bmatrix}\delta\boldsymbol{p}_g
\end{aligned}
\tag{19}
$$

したがって、ローカルとグローバルの仮想変位の関係は、

$$
\delta\boldsymbol{p}_l=\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{p}_g \tag{20}
$$

$\boldsymbol{B}$ は変換行列で、

$$
\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\\ \boldsymbol{b}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0\\ -\dfrac{s}{l_n} & \dfrac{c}{l_n} & 1 & \dfrac{s}{l_n} & -\dfrac{c}{l_n} & 0\\ -\dfrac{s}{l_n} & \dfrac{c}{l_n} & 0 & \dfrac{s}{l_n} & -\dfrac{c}{l_n} & 1\end{bmatrix} \tag{21}
$$

3　ひずみによるグローバル内力とグローバル接線剛性行列

ローカル内力 $\boldsymbol{f}_l$ とグローバル内力 $\boldsymbol{f}_g$ の関係は、仮想仕事が等価であることを用いると、

$$
V=\delta\boldsymbol{p}_g^T\boldsymbol{f}_g=\delta\boldsymbol{p}_l^T\boldsymbol{f}_l=\delta\boldsymbol{p}_g^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{f}_l \tag{22}
$$

任意の $\delta\boldsymbol{p}_g$ について成立するから、

$$
\boldsymbol{f}_g=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{f}_l \tag{23}
$$

$$
\boldsymbol{f}_l=\begin{bmatrix}N & M_1 & M_2\end{bmatrix}^T \tag{24}
$$

の関係を得る。

グローバル接線剛性行列 $\boldsymbol{K}_g$ は次式で定義される。

$$
\delta\boldsymbol{f}_g=\boldsymbol{K}_g\delta\boldsymbol{p}_g \tag{25}
$$

(22) 式より、

$$\delta \boldsymbol{f}_g = \boldsymbol{B}^T \delta \boldsymbol{f}_l + N \delta \boldsymbol{b}_1 + M_1 \delta \boldsymbol{b}_2 + M_2 \delta \boldsymbol{b}_3 \tag{26}$$

次式を導入する。

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix}^T \tag{27}$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} s & -c & 0 & -s & c & 0 \end{bmatrix}^T \tag{28}$$

(16) 式、(19) 式は次のように書き直せる。

$$\delta \overline{u} = \delta l_n = \boldsymbol{r}^T \delta \boldsymbol{p}_g \tag{29}$$

$$\delta \beta = \frac{\boldsymbol{z}^T}{l_n} \delta \boldsymbol{p}_g \tag{30}$$

さて、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{b}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T - \frac{\boldsymbol{z}}{l_n} \\ \boldsymbol{b}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T - \frac{\boldsymbol{z}}{l_n} \end{aligned} \tag{31}$$

微分すると、

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{b}_1 &= \delta \boldsymbol{r} = \delta \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} s & -c & 0 & -s & c & 0 \end{bmatrix}^T \delta \beta \\ &= \boldsymbol{z} \delta \beta \\ &= \frac{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T}{l_n} \delta \boldsymbol{p}_g \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{b}_2 &= \delta \left(-\frac{\boldsymbol{z}}{l_n} \right) \\ &= \frac{\boldsymbol{z} \delta l_n}{l_n^2} - \frac{\delta \boldsymbol{z}}{l_n} \end{aligned} \tag{33}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{z} &= \delta \begin{bmatrix} s & -c & 0 & -s & c & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} c & s & 0 & -c & -s & 0 \end{bmatrix}^T \delta \beta \\ &= -\boldsymbol{r} \delta \beta \\ &= -\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}^T}{l_n} \delta \boldsymbol{p}_g \end{aligned} \tag{34}$$

を用いると、

$$\delta \boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{z}\delta l_n}{l_n^2} - \frac{1}{l_n}\left(-\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}^T}{l_n}\delta \boldsymbol{p}_g\right)$$

$$= \frac{1}{l_n^2}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}^T + \boldsymbol{z}\boldsymbol{r}^T)\delta \boldsymbol{p}_g \tag{35}$$

$$\delta \boldsymbol{b}_3 = \delta \boldsymbol{b}_2 \tag{36}$$

(26) 式

$$\delta \boldsymbol{f}_g = \boldsymbol{B}^T \delta \boldsymbol{f}_l + N\delta \boldsymbol{b}_1 + M_1 \delta \boldsymbol{b}_2 + M_2 \delta \boldsymbol{b}_3$$

の第 1 項はローカル接線剛性行列 $\boldsymbol{K}_l$ を導入して計算する。

$$\delta \boldsymbol{f}_l = \boldsymbol{K}_l \delta \boldsymbol{p}_l = \boldsymbol{K}_l \boldsymbol{B} \delta \boldsymbol{p}_g \tag{37}$$

これを (26) 式に代入する。

$$\delta \boldsymbol{f}_g = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{K}_l \boldsymbol{B} \delta \boldsymbol{p}_g + N\delta \boldsymbol{b}_1 + M_1 \delta \boldsymbol{b}_2 + M_2 \delta \boldsymbol{b}_3$$

$$= \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{K}_l \boldsymbol{B} \delta \boldsymbol{p}_g + N\frac{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T}{l_n}\delta \boldsymbol{p}_g + (M_1 + M_2)\frac{1}{l_n^2}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}^T + \boldsymbol{z}\boldsymbol{r}^T)$$

$$= \left\{\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{K}_l \boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T}{l_n}N + \frac{1}{l_n^2}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}^T + \boldsymbol{z}\boldsymbol{r}^T)(M_1 + M_2)\right\}\delta \boldsymbol{p}_g \tag{38}$$

$$= \boldsymbol{K}_g \delta \boldsymbol{p}_g \tag{39}$$

グローバル接線剛性行列 $\boldsymbol{K}_g$ は、

$$\boldsymbol{K}_g = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{K}_l \boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T}{l_n}N + \frac{1}{l_n^2}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}^T + \boldsymbol{z}\boldsymbol{r}^T)(M_1 + M_2) \tag{40}$$

ここで、$\boldsymbol{K}_l$ と $\boldsymbol{f}_l = \begin{bmatrix} N & M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T$ は用いるローカル梁要素によって異なる。

4 ローカルひずみ内力とローカル接線剛性行列

shallow arch beam についてローカルひずみ内力とローカル接線行列を求める。
shallow arch の軸ひずみは、

$$\epsilon = \frac{1}{l_0}\int_{l_0}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}dx - ky \tag{41}$$

$$k = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{42}$$

軸方向変位 u は線形補間、垂直方向 v は 3 次補間する。

$$u = N_1\overline{u}_1 + N_4\overline{u}_2 \tag{43}$$

$$v = N_2\overline{v}_1 + N_3\overline{\theta}_1 + N_5\overline{v}_2 + N_6\overline{\theta}_2 \tag{44}$$

$$
\begin{aligned}
\xi &= \frac{2x}{l_0} - 1 \\
N_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \\
N_3 &= \frac{1}{8}l_0(1-\xi^2)(1-\xi) \\
N_4 &= \frac{1}{2}(1+\xi) \\
N_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \\
N_6 &= \frac{1}{8}l_0(1+\xi)^2(\xi-1)
\end{aligned}
\tag{45}
$$

co-rotational の定式化では、

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_1 &= 0 \\
\overline{u}_2 &= \overline{u} \\
\overline{v}_1 &= \overline{v}_2 = 0
\end{aligned}
$$

であるから次式となる。

$$
u = \frac{x}{l_0}\overline{u} \tag{46}
$$

$$
v = x\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2 \overline{\theta}_1 + \frac{x^2}{l_0}\left(\frac{x}{l_0} - 1\right)\overline{\theta}_2 \tag{47}
$$

この補間を用いて軸ひずみを計算すると、

$$
\epsilon = \frac{\overline{u}}{l_0} + \frac{1}{15}\overline{\theta}_1^2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1\overline{\theta}_2 + \frac{1}{15}\overline{\theta}_2^2 + y\left\{\left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)\overline{\theta}_1 + \left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)\overline{\theta}_2\right\} \tag{48}
$$

仮想仕事と内力の関係は、

$$
V = \int_v \sigma\delta\epsilon dv = N\delta\overline{u} + M_1\delta\overline{\theta}_1 + M_2\delta\overline{\theta}_2 \tag{49}
$$

ここで、

$$
\delta\epsilon = \frac{\delta\overline{u}}{l_0} + \left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_2\right)\delta\overline{\theta}_1 + \left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1\right)\delta\overline{\theta}_2 + \left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)y\delta\overline{\theta}_1 + \left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)y\delta\overline{\theta}_2 \tag{50}
$$

したがって内力 $\boldsymbol{f}_l = \begin{bmatrix} N & M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T$ は、

$$N = \int_v \frac{\sigma}{l_0} dv \tag{51}$$

$$M_1 = \left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \sigma \left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) y dv \tag{52}$$

$$M_2 = \left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \sigma \left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) y dv \tag{53}$$

内力の微分を求めると、

$$\delta N = \frac{1}{l_0} \int_v \delta\sigma dv \tag{54}$$

$$\delta M_1 = \left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_2 \right) \int_v \delta\sigma dv + \left(\frac{2}{15}\delta\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\delta\overline{\theta}_2 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \delta\sigma \left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) y dv \tag{55}$$

$$\delta M_2 = \left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1 \right) \int_v \delta\sigma dv + \left(\frac{2}{15}\delta\overline{\theta}_2 - \frac{1}{30}\delta\overline{\theta}_1 \right) \int_v \sigma dv + \int_v \delta\sigma \left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) y dv \tag{56}$$

ただし、

$$\sigma = E\epsilon \tag{57}$$

$$\delta\sigma = E\delta\epsilon \tag{58}$$

である。

$$\begin{aligned} \int_v \delta\sigma dv = EA &\left\{ \frac{\delta\overline{u}}{l_0} + \left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_2 \right) \delta\overline{\theta}_1 + \left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1 \right) \delta\overline{\theta}_2 \right\} \int_{l_0} dx \\ &+ E \int_A y dA \int_{l_0} \left\{ \left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) \delta\overline{\theta}_1 + \left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) \delta\overline{\theta}_2 \right\} dx \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} \int_v \sigma dv = EA &\left(\frac{\overline{u}}{l_0} + \frac{1}{15}\overline{\theta}_1^2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1\overline{\theta}_2 + \frac{1}{15}\overline{\theta}_2^2 \right) \int_{l_0} dx \\ &+ E \int_A y dA \int_{l_0} \left\{ \left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) \overline{\theta}_1 + \left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) \overline{\theta}_2 \right\} dx \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \int_v \sigma y dv = E \int_A y dA &\left(\frac{\overline{u}}{l_0} + \frac{1}{15}\overline{\theta}_1^2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1\overline{\theta}_2 + \frac{1}{15}\overline{\theta}_2^2 \right) \int_{l_0} dx \\ &+ E \int_A y^2 dA \int_{l_0} \left\{ \left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) \overline{\theta}_1 + \left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2} x \right) \overline{\theta}_2 \right\} dx \end{aligned} \tag{61}$$

ローカル接線剛性行列 $\boldsymbol{K}_l$ は、

$$
\begin{aligned}
K_{l11} &= \frac{\partial N}{\partial \overline{u}} \\
&= \frac{EA}{l_0^2}\int_v dx \qquad (62) \\
K_{l12} &= \frac{\partial N}{\partial \overline{\theta}_1} \\
&= \frac{EA}{l_0}\left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_2\right)\int_{l_0} dx + \frac{E}{l_0}\int_A ydA\int_{l_0}\left(\frac{4}{l_0} - \frac{4}{l_0^2}x\right)dx \qquad (63) \\
K_{l13} &= \frac{\partial N}{\partial \overline{\theta}_2} \\
&= \frac{EA}{l_0}\left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1\right)\int_{l_0} dx + \frac{E}{l_0}\int_A ydA\int_{l_0}\left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)dx \qquad (64) \\
K_{l21} &= \frac{\partial M_1}{\partial \overline{u}} \\
&= K_{l12} \qquad (65) \\
K_{l22} &= \frac{\partial M_1}{\partial \overline{\theta}_1} \\
&= EA\left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_2\right)^2\int_{l_0} dx + 2E\left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_2\right)\int_A ydA\int_{l_0}\left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)dx \\
&\qquad + \frac{2}{15}\int_v \sigma dv + E\int_A y^2 dA\int_{l_0}\left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)^2 dx \qquad (66) \\
K_{l23} &= \frac{\partial M_1}{\partial \overline{\theta}_2} \\
&= EA\left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_2\right)\left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1\right)\int_{l_0} dx + E\left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_1 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_2\right)\int_A ydA\int_{l_0}\left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)dx \\
&\qquad - \frac{1}{30}\int_v \sigma dv \\
&\qquad + E\left(\frac{2}{15}\overline{\theta}_2 - \frac{1}{30}\overline{\theta}_1\right)\int_A ydA\int_{l_0}\left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)dx \\
&\qquad + E\int_A y^2 dA\int_{l_0}\left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)\left(\frac{4}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)dx \qquad (67)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{l31} &= \frac{\partial M_2}{\partial \bar{u}} \\
&= K_{l13} &(68)\\
K_{l32} &= \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_1} \\
&= K_{l23} &(69)\\
K_{l33} &= \frac{\partial M_2}{\partial \bar{\theta}_2} \\
&= EA\left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right)^2 \int_{l_0} dx + 2E\left(\frac{2}{15}\bar{\theta}_2 - \frac{1}{30}\bar{\theta}_1\right) \int_A ydA \int_{l_0} \left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right) dx \\
&\qquad + \frac{2}{15}\int_v \sigma dv + E\int_A y^2 dA \int_{l_0} \left(\frac{2}{l_0} - \frac{6}{l_0^2}x\right)^2 dx &(70)
\end{aligned}
$$

5 運動エネルギーと慣性力

運動エネルギー (kinetic energy)K は、

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\rho\left\{\int_{l_0} A(\dot{\bar{u}}^2 + \dot{\bar{v}}^2)dx + \int_{l_0} I_z \dot{\bar{\theta}}^2 dx\right\} &(71)\\
&= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_l^T \boldsymbol{M}_l \dot{\boldsymbol{p}}_l &(72)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{M}_l$ はローカル質量行列で使用する梁要素によって異なる。
グローバル座標系に変換する。

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}}_l &= \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{p}}_g &(73)\\
\dot{\boldsymbol{p}}_l &= \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}}_1 & \dot{\bar{v}}_1 & \dot{\bar{\theta}}_1 & \dot{\bar{u}}_2 & \dot{\bar{v}}_2 & \dot{\bar{\theta}}_2 \end{bmatrix}^T &(74)\\
\dot{\boldsymbol{p}}_g &= \begin{bmatrix} \dot{u}_1 & \dot{v}_1 & \dot{\theta}_1 & \dot{u}_2 & \dot{v}_2 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T &(75)\\
\boldsymbol{T} &= \begin{bmatrix}
\cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} &(76)
\end{aligned}
$$

の関係を用いると、

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_g^T \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{M}_l \boldsymbol{T} \dot{\boldsymbol{p}}_g &(77)\\
&= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_g^T \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{p}}_g &(78)\\
\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{M}_l \boldsymbol{T} &(79)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{M}$ はグローバルな質量行列である。

慣性力 (inertia force) ベクトル $\boldsymbol{f}_K$ は、運動エネルギー K から計算される。

Lagrange の運動方程式より、

$$\boldsymbol{f}_K = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}_g}\right] - \left[\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{p}_g}\right] \tag{80}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}_g} = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{p}}_g \tag{81}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial K}{\partial \dot{p}_g}\right] = \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{p}}_g + \dot{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{p}}_g \tag{82}$$

$\boldsymbol{M}$ は β の関数であり時間依存する。（今回使用する梁要素では $\overline{\theta}_1$、$\overline{\theta}_2$ に依存しないものを使用するが、一般的な定式化ではこれらの考慮も必要である。）

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \beta}\dot{\beta} = \boldsymbol{M}_\beta\dot{\beta} \tag{83}$$

$$= \boldsymbol{M}_\beta\left(\frac{1}{l_n}\boldsymbol{z}^T\dot{\boldsymbol{p}}_g\right) \tag{84}$$

$$\boldsymbol{M}_\beta = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \beta} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{p}_g} &= \frac{\partial K}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{p}_g}\\ &= \left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_g^T\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \beta}\dot{\boldsymbol{p}}_g\right)\frac{1}{l_n}\boldsymbol{z}\\ &= \left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_g^T\boldsymbol{M}_\beta\dot{\boldsymbol{p}}_g\right)\frac{\boldsymbol{z}}{l_n}\end{aligned} \tag{86}$$

以上から慣性力は、

$$\boldsymbol{f}_K = \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{p}}_g + \left\{\boldsymbol{M}_\beta\left(\frac{1}{l_n}\boldsymbol{z}^T\dot{\boldsymbol{p}}_g\right)\right\}\dot{\boldsymbol{p}}_g - \left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_g^T\boldsymbol{M}_\beta\dot{\boldsymbol{p}}_g\right)\frac{\boldsymbol{z}}{l_n} \tag{87}$$

$\boldsymbol{M}_\beta$ を求める。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_\beta &= \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \beta}\\ &= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{M}_l\boldsymbol{T}\right)\\ &= \frac{d\boldsymbol{T}^T}{d\beta}\boldsymbol{M}_l\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{M}_l\frac{d\boldsymbol{T}}{d\beta}\end{aligned} \tag{88}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{T}}{d\beta} &= \begin{bmatrix} -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{I}_0\boldsymbol{T}
\end{aligned} \tag{89}
$$

$$
\boldsymbol{I}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{90}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_\beta &= \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{I}_0^T\boldsymbol{M}_l\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{M}_l\boldsymbol{I}_0\boldsymbol{T} \\
&= \boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{I}_0^T\boldsymbol{M}_l + \boldsymbol{M}_l\boldsymbol{I}_0)\boldsymbol{T}
\end{aligned} \tag{91}
$$

6　非線形運動方程式

運動方程式は、

$$
\boldsymbol{f}_K + \boldsymbol{f}_g = 0 \tag{92}
$$

$\boldsymbol{f}_K$: Inertia force vector
$\boldsymbol{f}_g$: Elastic force vector
接線行列は、

$$
\boldsymbol{K}_g = \frac{\partial \boldsymbol{f}_g}{\partial \boldsymbol{p}_g} \tag{93}
$$

$$
\boldsymbol{M} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_K}{\partial \ddot{\boldsymbol{p}}_g} \tag{94}
$$

$$
\boldsymbol{C}_K = \frac{\partial \boldsymbol{f}_K}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}_g} \tag{95}
$$

$$
\boldsymbol{K}_K = \frac{\partial \boldsymbol{f}_K}{\partial \boldsymbol{p}_g} \tag{96}
$$

$\boldsymbol{K}_g$、$\boldsymbol{M}$ はすでに求めた。
$\boldsymbol{C}_K$ を求める。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_K &= \frac{\partial \boldsymbol{f}_K}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}_g} \\
&= \dot{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_1^T
\end{aligned} \tag{97}
$$

$$
\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{M}_\beta \left(\dot{\boldsymbol{p}}_g \frac{\boldsymbol{z}^T}{l_n} \right) \tag{98}
$$

$\boldsymbol{K}_K$ を求める。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_K &= \frac{\partial \boldsymbol{f}_K}{\partial \boldsymbol{p}_g} \\
&= \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2 - \boldsymbol{K}_3
\end{aligned} \tag{99}
$$

$$
\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{M}_\beta \ddot{\boldsymbol{p}}_g \frac{\boldsymbol{z}^T}{l_n} \tag{100}
$$

$$
\boldsymbol{K}_2 = \left(\frac{\boldsymbol{z}^T}{l_n} \dot{\boldsymbol{p}}_g \right) \left(\frac{\partial \boldsymbol{M}_\beta}{\partial \beta} \dot{\boldsymbol{p}}_g \frac{\boldsymbol{z}^T}{l_n} \right) - \boldsymbol{M}_\beta \dot{\boldsymbol{p}}_g \dot{\boldsymbol{p}}_g^T \left(\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}^T + \boldsymbol{z}\boldsymbol{r}^T}{l_n^2} \right) \tag{101}
$$

$$
\boldsymbol{K}_3 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\dot{\boldsymbol{p}}_g^T \frac{\partial \boldsymbol{M}_\beta}{\partial \beta} \dot{\boldsymbol{p}}_g \right) \frac{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T}{l_n^2} - \dot{\boldsymbol{p}}_g^T \boldsymbol{M}_\beta \dot{\boldsymbol{p}}_g \left(\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}^T + \boldsymbol{z}\boldsymbol{r}^T}{l_n^2} \right) \right\} \tag{102}
$$

$\dfrac{\partial \boldsymbol{M}_\beta}{\partial \beta}$ を求める。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{M}_\beta}{\partial \beta} &= \frac{d\boldsymbol{T}^T}{d\beta} \left(\boldsymbol{I}_0^T \boldsymbol{M}_l + \boldsymbol{M}_l \boldsymbol{I}_0 \right) \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T \left(\boldsymbol{I}_0^T \boldsymbol{M}_l + \boldsymbol{M}_l \boldsymbol{I}_0 \right) \frac{d\boldsymbol{T}}{d\beta} \\
&= \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{I}_0^T \left(\boldsymbol{I}_0^T \boldsymbol{M}_l + \boldsymbol{M}_l \boldsymbol{I}_0 \right) \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T \left(\boldsymbol{I}_0^T \boldsymbol{M}_l + \boldsymbol{M}_l \boldsymbol{I}_0 \right) \boldsymbol{I}_0 \boldsymbol{T}
\end{aligned} \tag{103}
$$

以上から Newton-Raphson 法を用いて線形化した運動方程式は、

$$
\boldsymbol{K}_g \Delta \boldsymbol{p}_g + \boldsymbol{M} \Delta \ddot{\boldsymbol{p}}_g + \boldsymbol{C}_K \Delta \dot{\boldsymbol{p}}_g + \boldsymbol{K}_K \Delta \boldsymbol{p}_g = -\boldsymbol{f}_g - \boldsymbol{f}_K \tag{104}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{p}_g &= \boldsymbol{p}_g - \boldsymbol{p}_g^{n-1} \\
\Delta \dot{\boldsymbol{p}}_g &= \dot{\boldsymbol{p}}_g - \dot{\boldsymbol{p}}_g^{n-1} \\
\Delta \ddot{\boldsymbol{p}}_g &= \ddot{\boldsymbol{p}}_g - \ddot{\boldsymbol{p}}_g
\end{aligned}
$$

Newmark β 法

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\boldsymbol{p}_g - \boldsymbol{p}_g^{t-1}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\boldsymbol{p}}_g^{t-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\boldsymbol{p}}_g^{t-1} \\
\ddot{\boldsymbol{p}}_g &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\boldsymbol{p}_g - \boldsymbol{p}_g^{t-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\boldsymbol{p}}_g^{t-1} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\boldsymbol{p}}_g^{t-1}
\end{aligned}
$$

を適用すると、

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}_g\boldsymbol{p}_g + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_g + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{C}_K\boldsymbol{p}_g + \boldsymbol{K}_K\boldsymbol{p}_g \\
&\quad = \boldsymbol{K}_g\boldsymbol{p}_g^{n-1} + \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{p}}_g^{n-1} + \boldsymbol{C}_K\dot{\boldsymbol{p}}_g^{n-1} + \boldsymbol{K}_K\boldsymbol{p}_g^{n-1} \\
&\quad +\boldsymbol{M}\left\{\frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{p}_g^{t-1} + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\boldsymbol{p}}_g^{t-1} + \left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\ddot{\boldsymbol{p}}_g^{t-1}\right\} \\
&\quad +\boldsymbol{C}_K\left\{\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{p}_g^{t-1} + \left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\dot{\boldsymbol{p}}_g^{t-1} + \left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\Delta t\ddot{\boldsymbol{p}}_g^{t-1}\right\}
\end{aligned} \tag{105}$$

7　ローカル慣性力とローカル接線質量行列

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= N_1\dot{\bar{u}}_1 + N_4\dot{\bar{u}}_2 \\
\dot{v} &= N_2\dot{\bar{v}}_1 + N_3\dot{\bar{\theta}}_1 + N_5\dot{\bar{v}}_2 + N_6\dot{\bar{\theta}}_2 \\
\dot{\theta} &= \frac{\partial\dot{v}}{\partial x} \\
&= \frac{\partial\xi}{\partial x}(N_{2\xi}\dot{\bar{v}}_1 + N_{3\xi}\dot{\bar{\theta}}_1 + N_{5\xi}\dot{\bar{v}}_2 + N_{6\xi}\dot{\bar{\theta}}_2) \\
&= \frac{2}{l_0}(N_{2\xi}\dot{\bar{v}}_1 + N_{3\xi}\dot{\bar{\theta}}_1 + N_{5\xi}\dot{\bar{v}}_2 + N_{6\xi}\dot{\bar{\theta}}_2)
\end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}
N_{2\xi} &= \frac{1}{4}(-3+3\xi^2) \\
N_{3\xi} &= \frac{1}{8}l_0(-1-2\xi+3\xi^2) \\
N_{5\xi} &= \frac{1}{4}(3-3\xi^2) \\
N_{6\xi} &= \frac{1}{8}l_0(-1+2\xi+3\xi^2)
\end{aligned} \tag{107}$$

運動エネルギー K は、

$$K = \frac{1}{2}\rho\left\{\int_{l_0} A(\dot{u}^2+\dot{v}^2)dx + \int_{l_0} I_z\dot{\theta}^2 dx\right\} \tag{108}$$

K の第 1 項は、

$$\frac{1}{2}\rho\int_{l_0} A(\dot{u}^2+\dot{v}^2)dx = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_l^T\boldsymbol{M}_{l1}\dot{\boldsymbol{p}}_l \tag{109}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_l = \begin{bmatrix}\dot{\bar{u}}_1 & \dot{\bar{v}}_1 & \dot{\bar{\theta}}_1 & \dot{\bar{u}}_2 & \dot{\bar{v}}_2 & \dot{\bar{\theta}}_2\end{bmatrix}^T \tag{110}$$

$$\boldsymbol{M}_{l1} = \frac{\rho A l_0}{420}\begin{bmatrix}
140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\
 & 156 & 22l_0 & 0 & 54 & -13l_0 \\
 & & 4l_0^2 & 0 & 13l_0 & -3l_0^2 \\
 & & & 140 & 0 & 0 \\
 & & & & 156 & -22l_0 \\
 & & & & & 4l_0^2
\end{bmatrix} \tag{111}$$

K の第 2 項は、

$$\frac{1}{2}\rho\int_{l_0} I_z\dot{\theta}^2 dx = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_l^T\boldsymbol{M}_{l2}\dot{\boldsymbol{p}}_l \tag{112}$$

$$\boldsymbol{M}_{l2} = \frac{\rho I_z}{30l_0}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3l_0 & 0 & -36 & 3l_0 \\ & & 4l_0^2 & 0 & -3l_0 & -l_0^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 36 & -3l_0 \\ & & & & & 4l_0^2 \end{bmatrix} \tag{113}$$

よって、

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\rho\left\{\int_{l_0} A(\dot{u}^2+\dot{v}^2)dx + \int_{l_0} I_z\dot{\theta}^2 dx\right\} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_l^T\boldsymbol{M}_{l1}\dot{\boldsymbol{p}}_l + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_l\boldsymbol{M}_{l2}\dot{\boldsymbol{p}}_l \\ &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_l^T(\boldsymbol{M}_{l1}+\boldsymbol{M}_{l2}\dot{\boldsymbol{p}}_l \\ &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{p}}_l^T\boldsymbol{M}_l\dot{\boldsymbol{p}}_l \end{aligned} \tag{114}$$

$$\boldsymbol{M}_l = \boldsymbol{M}_{l1} + \boldsymbol{M}_{l2} \tag{115}$$

8 まとめ

幾何学的非線形な梁を扱うために Co-rotational formulation を行った。

9 参考文献

[1] Thanh-Nam Le, Jean-Marc Battini, Mohammed Hjiaj, "Efficient dynamic formulation for corotational 2D beams", Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2011 Leuven, Belgium, 4-6 July 2011

[2] Jean-Marc Battini, "Co-rotational beam elements in instability problems", Technical Reports from Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, SE-100 44 Stockholm, Sweden, January 2002