Bell Triangle（Bell の三角形要素)

ryujimiya

2019 年 9 月 12 日

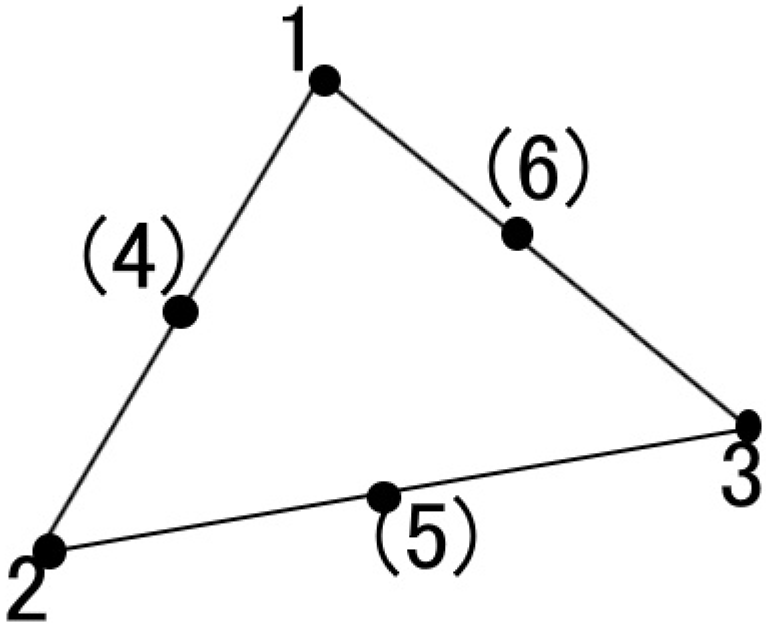
1　はじめに

三角形要素で分割するとき、隣接する要素の境界（辺）において、物理量 ϕ およびその法線微分 $\dfrac{\partial \phi}{\partial n}$ の両方が連続になる補間関数として Bell Triangle がある。
Bell Triangle は 5 次の多項式で構成され、法線微分は 4 次でなく 3 次の多項式で表されるように構成する。

各量の連続性はつぎのとおり：

○ ϕ　頂点及び辺上で連続
○ $\dfrac{\partial \phi}{\partial n}$　頂点及び辺上で連続
○ $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$　頂点でのみ連続
○ $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$　頂点でのみ連続
○ $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$　頂点でのみ連続
○ $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$　頂点でのみ連続
○ $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$　頂点でのみ連続

未知数は (連続性からもわかるが) 各頂点の ϕ 、$\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$、$\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$、$\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ になる。6 変数× 3 頂点で計 18 変数である。



Triangle.jpg

図 1　三角形要素

2　多項式

ξ 、η は三角形要素の局所座標で $\xi = L_1$、$\eta = L_2$ であるとする。ここに L_i (i = 1, 2, 3) は barycentric coordinate(面積座標) である。

$\phi = \{\alpha\}^T \{p\}$　(1)

$\mathrm{p}_1 = 1$
$\mathrm{p}_2 = \xi$
$\mathrm{p}_3 = \eta$
$\mathrm{p}_4 = \xi^2$
$\mathrm{p}_5 = \xi\eta$
$\mathrm{p}_6 = \eta^2$
$\mathrm{p}_7 = \xi^3$
$\mathrm{p}_8 = \xi^2\eta$
$\mathrm{p}_9 = \xi\eta^2$
$\mathrm{p}_{10} = \eta^3$
$\mathrm{p}_{11} = \xi^4$
$\mathrm{p}_{12} = \xi^3\eta$
$\mathrm{p}_{13} = \xi^2\eta^2$
$\mathrm{p}_{14} = \xi\eta^3$
$\mathrm{p}_{15} = \eta^4$
$\mathrm{p}_{16} = \xi^5$
$\mathrm{p}_{17} = \xi^4\eta$
$\mathrm{p}_{18} = \xi^3\eta^2$
$\mathrm{p}_{19} = \xi^2\eta^3$
$\mathrm{p}_{20} = \xi\eta^4$
$\mathrm{p}_{21} = \eta^5$　(2)

3　形状関数 (x, y 表示)

頂点 i の各量を次のように表す。

$\phi^i = \phi$
$\phi^i_x = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}$

$\phi_y^i = \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$

$\phi_{xx}^i = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

$\phi_{xy}^i = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$

$\phi_{yy}^i = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$

(3)

このとき、次のように表せる。

$\phi = \{N\}^T \{\phi\}$　(4)

$\phi_1 = \phi^1$
$\phi_2 = \phi_x^1$
$\phi_3 = \phi_y^1$
$\phi_4 = \phi_{xx}^1$
$\phi_5 = \phi_{xy}^1$
$\phi_6 = \phi_{yy}^1$
$\phi_7 = \phi^2$
$\phi_8 = \phi_x^2$
$\phi_9 = \phi_y^2$
$\phi_{10} = \phi_{xx}^2$
$\phi_{11} = \phi_{xy}^2$
$\phi_{12} = \phi_{yy}^2$
$\phi_{13} = \phi^3$
$\phi_{14} = \phi_x^3$
$\phi_{15} = \phi_y^3$
$\phi_{16} = \phi_{xx}^3$
$\phi_{17} = \phi_{xy}^3$
$\phi_{18} = \phi_{yy}^3$

(5)

4　形状関数 (ξ , η 表示)

$\phi = \{\overline{N}\}^T\{\overline{\phi}\}$ (6)

$\overline{\phi}_1 = \phi^1$
$\overline{\phi}_2 = \phi^1_\xi$
$\overline{\phi}_3 = \phi^1_\eta$
$\overline{\phi}_4 = \phi^1_{\xi\xi}$
$\overline{\phi}_5 = \phi^1_{\xi\eta}$
$\overline{\phi}_6 = \phi^1_{\eta\eta}$
$\overline{\phi}_7 = \phi^2$
$\overline{\phi}_8 = \phi^2_\xi$
$\overline{\phi}_9 = \phi^2_\eta$
$\overline{\phi}_{10} = \phi^2_{\xi\xi}$
$\overline{\phi}_{11} = \phi^2_{\xi\eta}$
$\overline{\phi}_{12} = \phi^2_{\eta\eta}$
$\overline{\phi}_{13} = \phi^3$
$\overline{\phi}_{14} = \phi^3_\xi$
$\overline{\phi}_{15} = \phi^3_\eta$
$\overline{\phi}_{16} = \phi^3_{\xi\xi}$
$\overline{\phi}_{17} = \phi^3_{\xi\eta}$
$\overline{\phi}_{18} = \phi^3_{\eta\eta}$
(7)

5 形状関数 (x , y 表示) と形状関数 (ξ , η 表示) の関係

$\overline{\phi} = [C]\{\phi\}$ (8)

の関係があるので、これを用いると

$\phi = \{\overline{N}\}^T[C]\{\phi\}$ (9)

したがって、

{N} = [C] $\{\overline{N}\}$ (10)

6 $\{\phi\}$ と $\{\overline{\phi}\}$ の関係

$\overline{\phi} = [C]\{\phi\} \quad (11)$

$\{\overline{\phi}\} = [\{\overline{\phi}\}^1\ \{\overline{\phi}\}^2\ \{\overline{\phi}\}^3]^T$
$\{\phi\} = [\{\phi\}^1\ \{\phi\}^2\ \{\phi\}^3]^T$
$\{\overline{\phi}\}^i = [\phi^i\ \phi^i_\xi\ \phi^i_\eta\ \phi^i_{\xi\xi}\ \phi^i_{\xi\eta}\ \phi^i_{\eta\eta}]^T$
$\{\phi\}^i = [\phi^i\ \phi^i_x\ \phi^i_y\ \phi^i_{xx}\ \phi^i_{xy}\ \phi^i_{yy}]^T$
(12)

とすると、

$\{\overline{\phi}\}^i = [C_0]\{\phi\}^i \quad (13)$

なる関係が導き出せるので、

$$\begin{bmatrix} \{\overline{\phi}\}^1 \\ \{\overline{\phi}\}^2 \\ \{\overline{\phi}\}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 & & \\ & C_0 & \\ & & C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi\}^1 \\ \{\phi\}^2 \\ \{\phi\}^3 \end{bmatrix}$$
(14)

すなわち、

$\overline{\phi} = [C]\{\phi\}$

C= $\begin{bmatrix} C_0 & & \\ & C_0 & \\ & & C_0 \end{bmatrix}$
(15)

$[C_0]$ は計算すると次のように求まる。

$$
[\mathrm{C}_0] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \bar{c}_2 & -\bar{b}_2 & & & \\ & -\bar{c}_1 & \bar{b}_1 & & & \\ & & & \bar{c}_2^2 & -2\bar{b}_2\bar{c}_2 & \bar{b}_2^2 \\ & & & -\bar{c}_1\bar{c}_2 & \bar{b}_1\bar{c}_2 + \bar{b}_2\bar{c}_1 & -\bar{b}_1\bar{b}_2 \\ & & & \bar{c}_1^2 & -2\bar{b}_1\bar{c}_1 & \bar{b}_1^2 \end{bmatrix} \quad (16)
$$

ただし、

$$
\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}
$$
(17)

$\bar{a}_i = 2A_e a_i$
$\bar{b}_i = 2A_e b_i$
$\bar{c}_i = 2A_e c_i$
$\mathrm{Ae} =$ 三角形の面積
(18)

a_i、b_i、c_i については頂点 1 について計算すると、

$\mathrm{a}_1 = \dfrac{1}{2A_e}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$
$\mathrm{b}_1 = \dfrac{1}{2A_e}(y_2 - y_3)$
$\mathrm{c}_1 = \dfrac{1}{2A_e}(x_3 - x_2)$
(19)

7　微分

$\dfrac{\partial}{\partial x} = b_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi} + b_2 \dfrac{\partial}{\partial \eta}$
$\dfrac{\partial}{\partial y} = c_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \dfrac{\partial}{\partial \eta}$
(20)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = 2A_e c_2 \frac{\partial}{\partial x} - 2A_e b_2 \frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial \eta} = -2A_e c_1 \frac{\partial}{\partial x} + 2A_e b_1 \frac{\partial}{\partial y}$$
(21)

辺 1（頂点 2-3) の法線微分を求める。

$$\frac{\partial}{\partial n^1} = n_x^1 \frac{\partial}{\partial x} + n_y^1 \frac{\partial}{\partial y}$$
(22)

n^1 は外向き法線方向であり、次のように計算できる。

$$\mathrm{n}_x^1 = \frac{-\,b_1}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}$$
$$\mathrm{n}_y^1 = \frac{-\,c_1}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}}$$
(23)

したがって辺 1 の法線微分は、

$$\frac{\partial}{\partial n^1} = -\frac{1}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2}} \{(b_1^2 + c_1^2)\frac{\partial}{\partial \xi} + (b_1 b_2 + c_1 c_2)\frac{\partial}{\partial \eta}\} \quad (24)$$

同様に計算すると、辺 2 の法線微分は、

$$\frac{\partial}{\partial n^2} = -\frac{1}{\sqrt{b_2^2 + c_2^2}} \{(b_1 b_2 + c_1 c_2)\frac{\partial}{\partial \xi} + (b_2^2 + c_2^2)\frac{\partial}{\partial \eta}\} \quad (25)$$

辺 3 の法線微分は、

$$\frac{\partial}{\partial n^3} = -\frac{1}{\sqrt{b_3^2 + c_3^2}} \{(b_1 b_3 + c_1 c_3)\frac{\partial}{\partial \xi} + (b_2 b_3 + c_2 c_3)\frac{\partial}{\partial \eta}\} \quad (26)$$

{p} の微分は、$p_{\xi i} = \dfrac{\partial p_i}{\partial \xi}$ のように表記すると、p_i (i = 1,..., 21) について、

$\mathrm{p}_1 = 1$

$\mathrm{p}_{\xi 1} = 0$

$\mathrm{p}_{\eta 1} = 0$

$\mathrm{p}_{\xi\xi 1} = 0$

$p_{\xi\eta 1} = 0$

$p_{\eta\eta 1} = 0$

(27)

$p_2 = \xi$

$p_{\xi 2} = 1$

$p_{\eta 2} = 0$

$p_{\xi\xi 2} = 0$

$p_{\xi\eta 2} = 0$

$p_{\eta\eta 2} = 0$

(28)

$p_3 = \eta$

$p_{\xi 3} = 0$

$p_{\eta 3} = 1$

$p_{\xi\xi 3} = 0$

$p_{\xi\eta 3} = 0$

$p_{\eta\eta 3} = 0$

(29)

$p_4 = \xi^2$

$p_{\xi 4} = 2\xi$

$p_{\eta 4} = 0$

$p_{\xi\xi 4} = 2$

$p_{\xi\eta 4} = 0$

$p_{\eta\eta 4} = 0$

(30)

$p_5 = \xi\eta$

$p_{\xi 5} = \eta$

$p_{\eta 5} = \xi$

$p_{\xi\xi 5} = 0$

$p_{\xi\eta 5} = 1$

$p_{\eta\eta 5} = 0$

(31)

$p_6 = \eta^2$
$p_{\xi 6} = 0$
$p_{\eta 6} = 2\eta$
$p_{\xi\xi 6} = 0$
$p_{\xi\eta 6} = 0$
$p_{\eta\eta 6} = 2$
(32)

$p_7 = \xi^3$
$p_{\xi 7} = 3\xi^2$
$p_{\eta 7} = 0$
$p_{\xi\xi 7} = 6\xi$
$p_{\xi\eta 7} = 0$
$p_{\eta\eta 7} = 0$
(33)

$p_8 = \xi^2\eta$
$p_{\xi 8} = 2\xi\eta$
$p_{\eta 8} = \xi^2$
$p_{\xi\xi 8} = 2\eta$
$p_{\xi\eta 8} = 2\xi$
$p_{\eta\eta 8} = 0$
(34)

$p_9 = \xi\eta^2$
$p_{\xi 9} = \eta^2$
$p_{\eta 9} = 2\xi\eta$
$p_{\xi\xi 9} = 0$
$p_{\xi\eta 9} = 2\eta$
$p_{\eta\eta 9} = 2\xi$
(35)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}_{10} &= \eta^3 \\
\mathrm{p}_{\xi 10} &= 0 \\
\mathrm{p}_{\eta 10} &= 3\eta^2 \\
\mathrm{p}_{\xi\xi 10} &= 0 \\
\mathrm{p}_{\xi\eta 10} &= 0 \\
\mathrm{p}_{\eta\eta 10} &= 6\eta
\end{aligned}
$$
(36)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}_{11} &= \xi^4 \\
\mathrm{p}_{\xi 11} &= 4\xi^3 \\
\mathrm{p}_{\eta 11} &= 0 \\
\mathrm{p}_{\xi\xi 11} &= 12\xi^2 \\
\mathrm{p}_{\xi\eta 11} &= 0 \\
\mathrm{p}_{\eta\eta 11} &= 0
\end{aligned}
$$
(37)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}_{12} &= \xi^3\eta \\
\mathrm{p}_{\xi 12} &= 3\xi^2\eta \\
\mathrm{p}_{\eta 12} &= \xi^3 \\
\mathrm{p}_{\xi\xi 12} &= 6\xi\eta \\
\mathrm{p}_{\xi\eta 12} &= 3\xi^2 \\
\mathrm{p}_{\eta\eta 12} &= 0
\end{aligned}
$$
(38)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}_{13} &= \xi^2\eta^2 \\
\mathrm{p}_{\xi 13} &= 2\xi\eta^2 \\
\mathrm{p}_{\eta 13} &= 2\xi^2\eta \\
\mathrm{p}_{\xi\xi 13} &= 2\eta^2 \\
\mathrm{p}_{\xi\eta 13} &= 4\xi\eta \\
\mathrm{p}_{\eta\eta 13} &= 2\xi^2
\end{aligned}
$$
(39)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}_{14} &= \xi\eta^3 \\
\mathrm{p}_{\xi 14} &= \eta^3 \\
\mathrm{p}_{\eta 14} &= 3\xi\eta^2
\end{aligned}
$$

$\mathrm{p}_{\xi\xi 14} = 0$
$\mathrm{p}_{\xi\eta 14} = 3\eta^2$
$\mathrm{p}_{\eta\eta 14} = 6\xi\eta$
(40)

$\mathrm{p}_{15} = \eta^4$
$\mathrm{p}_{\xi 15} = 0$
$\mathrm{p}_{\eta 15} = 4\eta^3$
$\mathrm{p}_{\xi\xi 15} = 0$
$\mathrm{p}_{\xi\eta 15} = 0$
$\mathrm{p}_{\eta\eta 15} = 12\eta^2$
(41)

$\mathrm{p}_{16} = \xi^5$
$\mathrm{p}_{\xi 16} = 5\xi^4$
$\mathrm{p}_{\eta 16} = 0$
$\mathrm{p}_{\xi\xi 16} = 20\xi^3$
$\mathrm{p}_{\xi\eta 16} = 0$
$\mathrm{p}_{\eta\eta 16} = 0$
(42)

$\mathrm{p}_{17} = \xi^4\eta$
$\mathrm{p}_{\xi 17} = 4\xi^3\eta$
$\mathrm{p}_{\eta 17} = \xi^4$
$\mathrm{p}_{\xi\xi 17} = 12\xi^2\eta$
$\mathrm{p}_{\xi\eta 17} = 4\xi^3$
$\mathrm{p}_{\eta\eta 17} = 0$
(43)

$\mathrm{p}_{18} = \xi^3\eta^2$
$\mathrm{p}_{\xi 18} = 3\xi^2\eta^2$
$\mathrm{p}_{\eta 18} = 2\xi^3\eta$
$\mathrm{p}_{\xi\xi 18} = 6\xi\eta^2$
$\mathrm{p}_{\xi\eta 18} = 6\xi^2\eta$
$\mathrm{p}_{\eta\eta 18} = 2\xi^3$

(44)

$\mathrm{p}_{19} = \xi^2\eta^3$
$\mathrm{p}_{\xi 19} = 2\xi\eta^3$
$\mathrm{p}_{\eta 19} = 3\xi^2\eta^2$
$\mathrm{p}_{\xi\xi 19} = 2\eta^3$
$\mathrm{p}_{\xi\eta 19} = 6\xi\eta^2$
$\mathrm{p}_{\eta\eta 19} = 6\xi^2\eta$
(45)

$\mathrm{p}_{20} = \xi\eta^4$
$\mathrm{p}_{\xi 20} = \eta^4$
$\mathrm{p}_{\eta 20} = 4\xi\eta^3$
$\mathrm{p}_{\xi\xi 20} = 0$
$\mathrm{p}_{\xi\eta 20} = 4\eta^3$
$\mathrm{p}_{\eta\eta 20} = 12\xi\eta^2$
(46)

$\mathrm{p}_{21} = \eta^5$
$\mathrm{p}_{\xi 21} = 0$
$\mathrm{p}_{\eta 21} = 5\eta^4$
$\mathrm{p}_{\xi\xi 21} = 0$
$\mathrm{p}_{\xi\eta 21} = 0$
$\mathrm{p}_{\eta\eta 21} = 20\eta^3$
(47)

8　α の計算【1】節点値の関係式

node1 は、$L_1 = 1$、$L_2 = L_3 = 0$ より、$\xi = 1$、$\eta = 0$

$$\overline{\phi}_1 = \phi^1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_{11} + \alpha_{16} \quad (48)$$

$$\overline{\phi}_2 = \phi^1_\xi = \alpha_2 + 2\alpha_4 + 3\alpha_7 + 4\alpha_{11} + 5\alpha_{16} \quad (49)$$

$$\overline{\phi}_3 = \phi^1_\eta = \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_8 + \alpha_{12} + \alpha_{17} \quad (50)$$

$$\overline{\phi}_4 = \phi^1_{\xi\xi} = 2\alpha_4 + 6\alpha_7 + 12\alpha_{11} + 20\alpha_{16} \quad (51)$$

$$\overline{\phi}_5 = \phi^1_{\xi\eta} = \alpha_5 + 2\alpha_8 + 3\alpha_{12} + 4\alpha_{17} \quad (52)$$

$$\overline{\phi}_6 = \phi^1_{\eta\eta} = 2\alpha_6 + 2\alpha_9 + 2\alpha_{13} + 2\alpha_{18} \quad (53)$$

node2 は、$L_2 = 1$、$L_3 = L_1 = 0$ より、$\xi = 0$、$\eta = 1$

$$\overline{\phi}_7 = \phi^2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{10} + \alpha_{15} + \alpha_{21} \quad (54)$$

$$\overline{\phi}_8 = \phi^2_\xi = \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{14} + \alpha_{20} \quad (55)$$

$$\overline{\phi}_9 = \phi^2_\eta = \alpha_3 + 2\alpha_6 + 3\alpha_{10} + 4\alpha_{15} + 5\alpha 21 \quad (56)$$

$$\overline{\phi}_{10} = \phi^2_{\xi\xi} = 2\alpha_4 + 2\alpha_8 + 2\alpha_{13} + 2\alpha_{19} \quad (57)$$

$$\overline{\phi}_{11} = \phi^2_{\xi\eta} = \alpha_5 + 2\alpha_9 + 3\alpha_{14} + 4\alpha_{20} \quad (58)$$

$$\overline{\phi}_{12} = \phi^2_{\eta\eta} = 2\alpha_6 + 6\alpha_{10} + 12\alpha_{15} + 20\alpha_{21} \quad (59)$$

node3 は、$L_3 = 1$、$L_1 = L_2 = 0$ より、$\xi = 0$、$\eta = 0$

$$\overline{\phi}_{13} = \phi^3 = \alpha_1 \quad (60)$$

$$\overline{\phi}_{14} = \phi^3_\xi = \alpha_2 \quad (61)$$

$$\overline{\phi}_{15} = \phi^3_\eta = \alpha_3 \quad (62)$$

$$\overline{\phi}_{16} = \phi^3_{\xi\xi} = 2\alpha_4 \quad (63)$$

$$\overline{\phi}_{17} = \phi^3_{\xi\eta} = \alpha_5 \quad (64)$$

$$\overline{\phi}_{18} = \phi^3_{\eta\eta} = 2\alpha_6 \quad (65)$$

　node3 より

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \overline{\phi}_{13} \\ \alpha_2 &= \overline{\phi}_{14} \\ \alpha_3 &= \overline{\phi}_{15} \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2}\overline{\phi}_{16} \\ \alpha_5 &= \overline{\phi}_{17} \\ \alpha_6 &= \frac{1}{2}\overline{\phi}_{18} \end{aligned}$$
(66)

　node1 の $\overline{\phi}_1$、$\overline{\phi}_2$、$\overline{\phi}_4$ より、

$$\begin{aligned} \alpha_7 + \alpha_{11} + \alpha_{16} &= \overline{\phi}_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 \\ 3\alpha_7 + 4\alpha_{11} + 5\alpha_{16} &= \overline{\phi}_2 - \alpha_2 - 2\alpha_4 \\ 6\alpha_7 + 12\alpha_{11} + 20\alpha_{16} &= \overline{\phi}_4 - 2\alpha_4 \end{aligned}$$
(67)

したがって、

$$\alpha_7 = 10\overline{\phi}_1 - 4\overline{\phi}_2 + \frac{1}{2}\overline{\phi}_4 - 10\overline{\phi}_{13} - 6\overline{\phi}_{14} - \frac{3}{2}\overline{\phi}_{16}$$
$$\alpha_{11} = -15\overline{\phi}_1 + 7\overline{\phi}_2 - \overline{\phi}_4 + 15\overline{\phi}_{13} + 8\overline{\phi}_{14} + \frac{3}{2}\overline{\phi}_{16}$$
$$\alpha_{16} = 6\overline{\phi}_1 - 3\overline{\phi}_2 + \frac{1}{2}\overline{\phi}_4 - 6\overline{\phi}_{13} - 3\overline{\phi}_{14} - \frac{1}{2}\overline{\phi}_{16}$$
(68)

　node2 の $\overline{\phi}_7$、$\overline{\phi}_9$、$\overline{\phi}_{12}$ より、

$$\alpha_{10} + \alpha_{15} + \alpha_{21} = \overline{\phi}_7 - \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_6$$
$$3\alpha_{10} + 4\alpha_{15} + 5\alpha_{21} = \overline{\phi}_9 - \alpha_3 - 2\alpha_6$$
$$6\alpha_{10} + 12\alpha_{15} + 20\alpha_{21} = \overline{\phi}_{12} - 2\alpha_6$$
(69)

したがって、

$$\alpha_{10} = 10\overline{\phi}_7 - 4\overline{\phi}_9 + \frac{1}{2}\overline{\phi}_{12} - 10\overline{\phi}_{13} - 6\overline{\phi}_{15} - \frac{3}{2}\overline{\phi}_{18}$$
$$\alpha_{15} = -15\overline{\phi}_7 + 7\overline{\phi}_9 - \overline{\phi}_{12} + 15\overline{\phi}_{13} + 8\overline{\phi}_{15} + \frac{3}{2}\overline{\phi}_{18}$$
$$\alpha_{21} = 6\overline{\phi}_7 - 3\overline{\phi}_9 + \frac{1}{2}\overline{\phi}_{12} - 6\overline{\phi}_{13} - 3\overline{\phi}_{15} - \frac{1}{2}\overline{\phi}_{18}$$
(70)

　残りの関係式：

$$\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_8 + \alpha_{12} + \alpha_{17} = \overline{\phi}_3 \quad (71)$$

$$\alpha_5 + 2\alpha_8 + 3\alpha_{12} + 4\alpha_{17} = \overline{\phi}_5 \quad (72)$$

$$2\alpha_6 + 2\alpha_9 + 2\alpha_{13} + 2\alpha_{18} = \overline{\phi}_6 \quad (73)$$

$$\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{14} + \alpha_{20} = \overline{\phi}_8 \quad (74)$$

$2\alpha_4 + 2\alpha_8 + 2\alpha_{13} + 2\alpha_{19} = \overline{\phi}_{10} \quad (75)$

$\alpha_5 + 2\alpha_9 + 3\alpha_{14} + 4\alpha_{20} = \overline{\phi}_{11} \quad (76)$

すでに求めた係数:

α_1〜α_6、 α_7、 α_{11}、 α_{16}、 α_{10}、 α_{15}、 α_{21}

9　α の計算【2】辺上の関係式

edge1 (node2-3 間の辺) 上で、s を辺方向座標 (最小値;0、最大値:辺の長さ) とすると、Bell Triangle の要件より法線方向微分は 3 次の多項式と仮定する。

$$\phi_{n1} = \frac{\partial \phi}{\partial n^1} = m_1 + m_2 s + m_3 s^2 + m_4 s^3 \quad (77)$$

$$\phi_{ns1} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^1 \partial s} = m_2 + 2m_3 s + 3m_4 s^2 \quad (78)$$

$s = 0$(node2) の節点値を ϕ_{n1}^2、 ϕ_{ns1}^2、 $s = l_1$(node3) の節点値を ϕ_{n1}^3、 ϕ_{ns1}^3 とすると、

$\mathrm{m}_1 = \phi_{n1}^2$
$\mathrm{m}_2 = \phi_{ns1}^2$
$\mathrm{m}_3 = \dfrac{1}{l_1^4}\{3l_1^2(\phi_{n1}^3 - m_1) + l_1^3(-\phi_{ns1}^3 - m_2)\}$
$\mathrm{m}_4 = \dfrac{1}{l_1^4}\{-2l_1(\phi_{n1}^3 - m_1) + l1^2(\phi_{ns1}^3 + m_2)\}$
(79)

$s = \dfrac{1}{2}l_1$ (node5) の (法線微分) 節点値を計算すると、次のようになる。

$$\phi_{n1}^5 = \frac{1}{2}(\phi_{n1}^2 + \phi_{n1}^3) + \frac{1}{8}l_1(\phi_{ns1}^2 - \phi_{ns1}^3) \quad (80)$$

α を求める際の条件として利用する。

α の計算に使用する辺上の微分を導出しておく。
edge1 について、

$$\frac{\partial}{\partial n^1} = -\frac{1}{2A_e}\frac{1}{l_1}(l_1^2\frac{\partial}{\partial \xi} + \overline{d}_{12}\frac{\partial}{\partial \eta}) \quad (81)$$

$$\overline{d}_{12} = \overline{b}_1\overline{b}_2 + \overline{c}_1\overline{c}_2 \quad (82)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = -\frac{1}{l_1}\frac{\partial}{\partial \eta} \quad (83)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n^1 \partial s} = -\frac{1}{2A_e}\frac{1}{l_1^2}(l_1^2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{d}_{12}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}) \quad (84)$$

これらを用いて、node2 の ϕ_{n1}^2、 $\phi^2 ns1$ 、 node3 の ϕ_{n1}^3、 $\phi^3 ns1$ 、 node5 の ϕ_{n1}^5 を計算し、 (65) 式に代入して整理すると、

$$4\alpha_9 + 2\alpha_{14} + \alpha_{20} = K_1 \quad (85)$$

$$\mathrm{K}_1 = 8(\overline{\phi}_8 + \overline{\phi}_{14}) - 2(\overline{\phi}_{11} - \overline{\phi}_{17}) + \frac{\overline{d}_1 2}{l_1^2}\{8(\overline{\phi}_9 + \overline{\phi}_{15}) - 2(\overline{\phi}_{12} - \overline{\phi}_{18}) - 16\alpha_3 - 16\alpha_6 - 12\alpha_{10} - 8\alpha_{15} - 5\alpha_{21}\} \quad (86)$$

(74)(76)(85) 式を連立して解けば、

$$\alpha_9 = -5\overline{\phi}_8 + \overline{\phi}_{11} + 5\alpha_2 + 4\alpha_5 + K_1 \quad (87)$$

$$\alpha_{14} = 14\overline{\phi}_8 - 3\overline{\phi}_{11} - 14\alpha_2 - 11\alpha_5 - 2K_1 \quad (88)$$

$$\alpha_{20} = -8\overline{\phi}_8 + 2\overline{\phi}_{11} + 8\alpha_2 + 6\alpha_5 + K_1 \quad (89)$$

edge2、edge3 についても同様に計算すると、edge2 より

$$\mathrm{K}_2 = 8(\overline{\phi}_{15} + \overline{\phi}_3) + 2(\overline{\phi}_{16} - \overline{\phi}_4) + \frac{\overline{d}_1 2}{l_2^2}\{8(\overline{\phi}_{14} + \overline{\phi}_2) - 2(\overline{\phi}_{16} - \overline{\phi}_4) - 16\alpha_2 - 16\alpha_4 - 12\alpha_7 - 8\alpha_{11} - 5\alpha_{16}\} \quad (90)$$

$\alpha_8 = -5\overline{\phi}_3 + \overline{\phi}_5 + 5\alpha_3 + 4\alpha_5 + K_2 \quad (91)$

$\alpha_{12} = 14\overline{\phi}_3 - 3\overline{\phi}_5 - 14\alpha_3 - 11\alpha_5 - 2K_2 \quad (92)$

$\alpha_{17} = -8\overline{\phi}_3 + 2\overline{\phi}_5 + 8\alpha_3 + 6\alpha_5 + K_2 \quad (93)$

edge3 より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}_3 = \frac{1}{\overline{d}_{13}+\overline{d}_{23}}\Big[\\
&\overline{d}_{13}\{8(\overline{\phi}_2+\overline{\phi}_8)+2(-\overline{\phi}_4+\overline{\phi}_5+\overline{\phi}_{10}-\overline{\phi}_{11})\}+ \\
&\overline{d}_{23}\{8(\overline{\phi}_3+\overline{\phi}_9)+2(-\overline{\phi}_5+\frac{5}{4}\overline{\phi}_6-\frac{1}{4}\overline{\phi}_{10}+\overline{\phi}_{11}-\overline{\phi}_{12})\} \\
&\overline{d}_{13}(-16\alpha_2-16\alpha_4-8\alpha_5-12\alpha_7-8\alpha_8-4\alpha_9-8\alpha_{11}-6\alpha_{12}-2\alpha_{14}-5\alpha_{16}-4\alpha_{17}-\alpha_{20})+ \\
&\overline{d}_{23}(-16\alpha_3+\alpha_4-8\alpha_5-17\alpha_6-3\alpha_8-9\alpha_9-12\alpha_{10}-2\alpha_{12}-6\alpha_{14}-8\alpha_{15}-\alpha_{17}-4\alpha_{20}-5\alpha_{21}) \\
&\Big]
\end{aligned}
$$

$\alpha_{13} = -\frac{1}{4}(-6\overline{\phi}_6 - 4\overline{\phi}_{10} + 8\alpha_4 + 12\alpha_6 + 8\alpha_8 + 12\alpha_9 + 4K_3) \quad (94)$

$\alpha_{18} = -\frac{1}{4}(4\overline{\phi}_6 + 4\overline{\phi}_{10} - 8\alpha_4 - 8\alpha_6 - 8\alpha_8 - 8\alpha_9 - 4K_3) \quad (95)$

$\alpha_{19} = -\frac{1}{4}(6\overline{\phi}_6 + 2\overline{\phi}_{10} - 4\alpha_4 - 12\alpha_6 - 4\alpha_8 - 12\alpha_9 - 4K_3) \quad (96)$

以上で $\{\alpha\}$ のすべての値を定めることができた。

10　形状関数 $\{N\}$ を求める手順

三角形要素内の任意の点 (積分点などが考えられる) の形状関数の値を計算するには、

1. $\{\alpha\}$ は、$\overline{\phi}$ の関数になっているので、$\{\alpha\}$ の $\overline{\phi}$ の係数を計算する。
2. その座標の $\{p\}$ を計算する。
3. $\{\alpha\}^T\{p\}$ の $\overline{\phi}$ の係数を計算する。
4. $[\mathrm{C}_0]$ を掛けて $\overline{\phi}$ の係数を ϕ の係数に変換する。

$\$\alpha\}^T\{p\} = \{N\}^T\{\phi\}$ の関係より、ϕ の係数が求めたかった $\{N\}$ である。

11 まとめ

三角形要素で値とその法線微分が連続である Bell Triangle の補間関数の係数を求め、形状関数を導出する方法を示した。