

2nd Order Tetrahedral Edge Element

ryujimiya

2021 年 06 月 30 日

1 はじめに

3 次元共振器解析や 3 次元導波路不連続問題に使用する 2 次の四面体辺要素を構成する。

2 2 次四面体辺要素

電界 $\boldsymbol{E}$ を 20 個のベクトル形状関数を使って補間する。

$$\boldsymbol{E} = \sum_{j=1}^{20} E_j \boldsymbol{N}_j \quad (1)$$

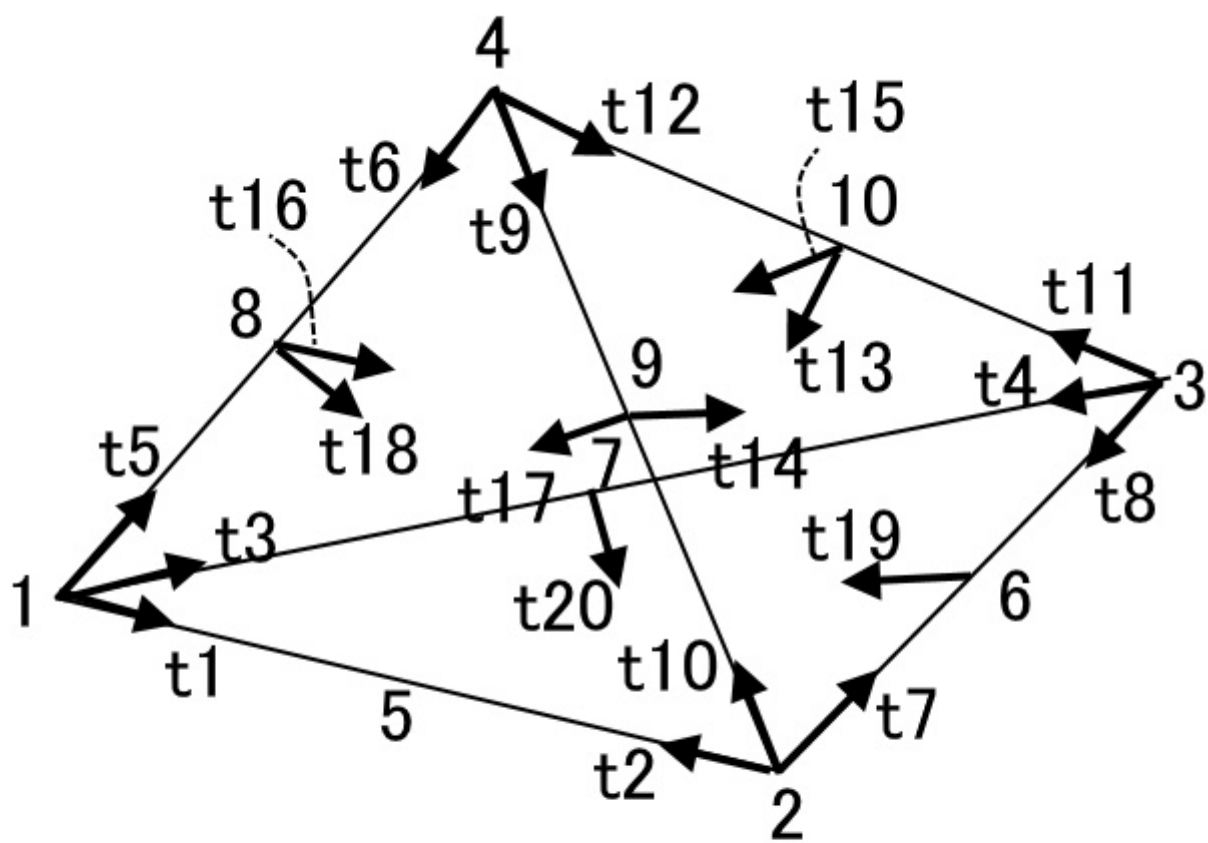


图 1 2nd order tetrahedral edge element

表 1 大きな辺番号

辺 e	i ₁	i ₂
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	4	2
6	3	4

大きな辺の長さを l_e とする。

$$l_e = |\mathbf{r}_{i2} - \mathbf{r}_{i1}| \quad (e = 1, \dots, 6)$$

四面体の稜線のパラメータについてのベクトル形状関数 $\mathbf{N}_i (i = 1, \dots, 12)$ は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1 &= l_1 L_1 \nabla L_2 \\
\mathbf{N}_2 &= l_1 L_2 \nabla L_1 \\
\mathbf{N}_3 &= l_2 L_1 \nabla L_3 \\
\mathbf{N}_4 &= l_2 L_3 \nabla L_1 \\
\mathbf{N}_5 &= l_3 L_1 \nabla L_4 \\
\mathbf{N}_6 &= l_3 L_4 \nabla L_1 \\
\mathbf{N}_7 &= l_4 L_2 \nabla L_3 \\
\mathbf{N}_8 &= l_4 L_3 \nabla L_2 \\
\mathbf{N}_9 &= l_5 L_4 \nabla L_2 \\
\mathbf{N}_{10} &= l_5 L_2 \nabla L_4 \\
\mathbf{N}_{11} &= l_6 L_3 \nabla L_4 \\
\mathbf{N}_{12} &= l_6 L_4 \nabla L_3
\end{aligned} \tag{2}$$

面 1、 $\triangle 234$ の内部パラメータについてのベクトル形状関数 $\mathbf{N}_{13}$, $\mathbf{N}_{14}$ は次のうちの 2 つ。

$$\begin{aligned}
&4L_3 L_4 \nabla L_2 \\
&4L_2 L_4 \nabla L_3 \\
&4L_2 L_3 \nabla L_4
\end{aligned} \tag{3}$$

面 2、 $\triangle 134$ の内部パラメータについてのベクトル形状関数 $\mathbf{N}_{15}$, $\mathbf{N}_{16}$ は次のうちの 2 つ。

$$\begin{aligned}
&4L_3 L_4 \nabla L_1 \\
&4L_1 L_4 \nabla L_3 \\
&4L_1 L_3 \nabla L_4
\end{aligned} \tag{4}$$

面 3、 $\triangle 124$ の内部パラメータについてのベクトル形状関数 $\mathbf{N}_{17}$, $\mathbf{N}_{18}$ は次のうちの 2 つ。

$$\begin{aligned}
&4L_2L_4\nabla L_1 \\
&4L_1L_4\nabla L_2 \\
&4L_1L_2\nabla L_4
\end{aligned} \tag{5}$$

面 4、 $\triangle 123$ の内部パラメータについてのベクトル形状関数 $\mathbf{N}_{19}$, $\mathbf{N}_{20}$ は次のうちの 2 つ。

$$\begin{aligned}
&4L_2L_3\nabla L_1 \\
&4L_1L_3\nabla L_2 \\
&4L_1L_2\nabla L_3
\end{aligned} \tag{6}$$

面のパラメータは非対称な配置になるので、四面体要素生成の際、隣接する要素で共有する面のパラメータの位置を一致させるように配置する必要がある。

稜線パラメータに対してベクトル形状関数の rot は、

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{N}_1 &= l_1 \nabla L_1 \times \nabla L_2 \\
\nabla \times \mathbf{N}_2 &= l_1 \nabla L_2 \times \nabla L_1 \\
\nabla \times \mathbf{N}_3 &= l_2 \nabla L_1 \times \nabla L_3 \\
\nabla \times \mathbf{N}_4 &= l_2 \nabla L_3 \times \nabla L_1 \\
\nabla \times \mathbf{N}_5 &= l_3 \nabla L_1 \times \nabla L_4 \\
\nabla \times \mathbf{N}_6 &= l_3 \nabla L_4 \times \nabla L_1 \\
\nabla \times \mathbf{N}_7 &= l_4 \nabla L_2 \times \nabla L_3 \\
\nabla \times \mathbf{N}_8 &= l_4 \nabla L_3 \times \nabla L_2 \\
\nabla \times \mathbf{N}_9 &= l_5 \nabla L_4 \times \nabla L_2 \\
\nabla \times \mathbf{N}_{10} &= l_5 \nabla L_2 \times \nabla L_4 \\
\nabla \times \mathbf{N}_{11} &= l_6 \nabla L_3 \times \nabla L_4 \\
\nabla \times \mathbf{N}_{12} &= l_6 \nabla L_4 \times \nabla L_3
\end{aligned} \tag{7}$$

面 1 に対してベクトル形状関数の rot、 $\nabla \times \mathbf{N}_{13}$, $\nabla \times \mathbf{N}_{14}$ は、次のうち 2 つ。

$$\begin{aligned}
\nabla \times (4L_3L_4\nabla L_2) &= 4L_3\nabla L_4 \times \nabla L_2 + 4L_4\nabla L_3 \times \nabla L_2 \\
\nabla \times (4L_2L_4\nabla L_3) &= 4L_2\nabla L_4 \times \nabla L_3 + 4L_4\nabla L_2 \times \nabla L_3 \\
\nabla \times (4L_2L_3\nabla L_4) &= 4L_2\nabla L_3 \times \nabla L_4 + 4L_3\nabla L_2 \times \nabla L_4
\end{aligned} \tag{8}$$

面 2 に対してベクトル形状関数の rot、 $\nabla \times \mathbf{N}_{15}$, $\nabla \times \mathbf{N}_{16}$ は、次のうち 2 つ。

$$\begin{aligned}
\nabla \times (4L_3L_4\nabla L_1) &= 4L_3\nabla L_4 \times \nabla L_1 + 4L_4\nabla L_3 \times \nabla L_1 \\
\nabla \times (4L_1L_4\nabla L_3) &= 4L_1\nabla L_4 \times \nabla L_3 + 4L_4\nabla L_1 \times \nabla L_3 \\
\nabla \times (4L_1L_3\nabla L_4) &= 4L_1\nabla L_3 \times \nabla L_4 + 4L_3\nabla L_1 \times \nabla L_4
\end{aligned} \tag{9}$$

面 3 に対してベクトル形状関数の rot、 $\nabla \times \mathbf{N}_{17}$, $\nabla \times \mathbf{N}_{18}$ は、次のうち 2 つ。

$$\begin{aligned}
\nabla \times (4L_2L_4\nabla L_1) &= 4L_2\nabla L_4 \times \nabla L_1 + 4L_4\nabla L_2 \times \nabla L_1 \\
\nabla \times (4L_1L_4\nabla L_2) &= 4L_1\nabla L_4 \times \nabla L_2 + 4L_4\nabla L_1 \times \nabla L_2 \\
\nabla \times (4L_1L_2\nabla L_4) &= 4L_1\nabla L_2 \times \nabla L_4 + 4L_2\nabla L_1 \times \nabla L_4
\end{aligned} \tag{10}$$

面 4 に対してベクトル形状関数の rot、 $\nabla \times \mathbf{N}_{19}$, $\nabla \times \mathbf{N}_{20}$ は、次のうち 2 つ。

$$\begin{aligned}
\nabla \times (4L_2L_3\nabla L_1) &= 4L_2\nabla L_3 \times \nabla L_1 + 4L_3\nabla L_2 \times \nabla L_1 \\
\nabla \times (4L_1L_3\nabla L_2) &= 4L_1\nabla L_3 \times \nabla L_2 + 4L_3\nabla L_1 \times \nabla L_2 \\
\nabla \times (4L_1L_2\nabla L_3) &= 4L_1\nabla L_2 \times \nabla L_3 + 4L_2\nabla L_1 \times \nabla L_3
\end{aligned} \tag{11}$$

3 まとめ

3次元共振器固有値問題や3次元導波路不連続問題で用いる2次四面体辺要素を構成した。

4 参考文献

- [1] J. F. Lee, D. K. Sun and Z. J. Cendes, "Tangential vector finite elements for electromagnetic field computation," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 27, no. 5, pp. 4032-4035, Sept. 1991