2nd Order Edge Element for Waveguide Full-wave Eigenmode Calculations

ryujimiya

2020 年 02 月 08 日

1　はじめに

2 次元導波路の固有モード解析の計算方法は、「Calculations Of Full-wave Eigenmodes Of Waveguides by Edge Element FEM」に記した。ただし、そこで使用した三角形要素は基本要素 (1 次要素) だった。
本書では、2 次元導波路の固有モードをベクトル波として解析するために使用する辺要素 (edge elements) とスカラー節点要素 (scalar nodal elements) の 2 次要素を構成する。

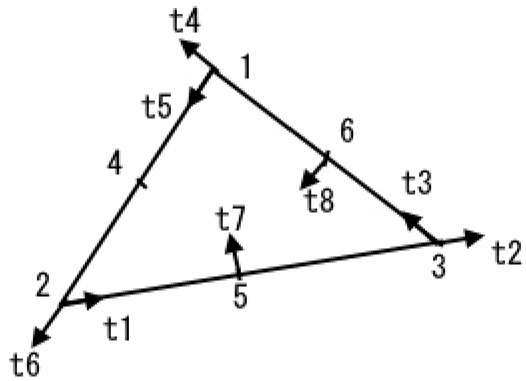
2　2 次 edge/nodal element

三角形要素に対する 2 次の scalar nodal element 形状関数は、

$$\begin{aligned}
N_1 &= L_1 (2L_1 - 1) \\
N_2 &= L_2 (2L_2 - 1) \\
N_3 &= L_3 (2L_3 - 1) \\
N_4 &= 4L_1 L_2 \\
N_5 &= 4L_2 L_3 \\
N_6 &= 4L_3 L_1
\end{aligned} \tag{1}$$

2 次の edge element のベクトル形状関数はいろいろあるが、一番シンプルな文献 [1] のベクトル形状関数を用いることにする。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{t1} &= L_2 \nabla_t L_3 \\
\boldsymbol{N}_{t2} &= -L_3 \nabla_t L_2 \\
\boldsymbol{N}_{t3} &= L_3 \nabla_t L_1 \\
\boldsymbol{N}_{t4} &= -L_1 \nabla_t L_3 \\
\boldsymbol{N}_{t5} &= L_1 \nabla_t L_2 \\
\boldsymbol{N}_{t6} &= -L_2 \nabla_t L_1 \\
\boldsymbol{N}_{t7} &= 4L_2 L_3 \nabla_t L_1 \\
\boldsymbol{N}_{t8} &= 4L_3 L_1 \nabla_t L_2
\end{aligned} \tag{2}$$



element 2nd order.jpg

図 1　2nd order edge/nodal triangular element

これらを用いると界ベクトル $\boldsymbol{E}$ は、

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t + E_z \boldsymbol{a}_z \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}_t = \sum_{j=1}^{8} E_{tj} \boldsymbol{N}_{tj} \tag{4}$$

$$E_z = j \sum_{j=1}^{6} E_{zj} N_j \tag{5}$$

で表される。ここで断面内の未知数 E_{tj} の単位は界に長さ (m) を掛けた量になっており、界そのものではない。

E_{zj} は j(imaginay one) で割った値であるが z 方向の界そのものである。

$$\begin{aligned}
\bar{b}_i &= \frac{b_i}{2A_e} \\
\bar{c}_i &= \frac{c_i}{2A_e} \\
\frac{\partial L_i}{\partial x} &= b_i \\
\frac{\partial L_i}{\partial y} &= c_i
\end{aligned} \tag{6}$$

L_i の grad は、

$$\begin{aligned}
\nabla_t L_1 &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L_1}{\partial y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \\
\nabla_t L_2 &= \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
\nabla_t L_3 &= -\nabla_t L_1 - \nabla_t L_2
\end{aligned} \tag{7}$$

$\boldsymbol{N}_{ti}$ の rot は、

$$
\begin{aligned}
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t1} &= \nabla_t \times (L_2 \nabla_t L_3) \\
&= \nabla_t L_2 \times \nabla_t L_3 \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t2} &= \nabla_t \times (-L_3 \nabla_t L_2) \\
&= -\nabla_t L_3 \times \nabla_t L_2 \\
&= \nabla_t L_2 \times \nabla_t L_3 \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t3} &= \nabla_t \times (L_3 \nabla_t L_1) \\
&= \nabla_t L_3 \times \nabla_t L_1 \\
\nabla_t \boldsymbol{N}_{t4} &= \nabla_t \times (-L_1 \nabla_t L_3) \\
&= -\nabla_t L_1 \times \nabla_t L_3 \\
&= \nabla_t L_3 \times \nabla_t L_1 \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t5} &= \nabla_t \times (L_1 \nabla_t L_2) \\
&= \nabla_t L_1 \times \nabla_t L_2 \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t6} &= \nabla_t \times (-L_2 \nabla_t L_1) \\
&= -\nabla_t L_2 \times \nabla_t L_1 \\
&= \nabla_t L_1 \times \nabla_t L_2 \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t7} &= \nabla_t \times (4 L_2 L_3 \nabla_t L_1) \\
&= 4 \nabla_t \left(L_2 L_3 \right) \times \nabla_t L_1 \\
&= 4 \left(L_3 \nabla_t L_2 + L_2 \nabla_t L_3 \right) \times \nabla_t L_1 \\
&= 4 L_3 \nabla_t L_2 \times \nabla_t L_1 + 4 L_2 \nabla_t L_3 \times \nabla_t L_1 \\
\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t8} &= \nabla_t \times (4 L_3 L_1 \nabla_t L_2) \\
&= 4 L_1 \nabla_t L_3 \times \nabla_t L_2 + 4 L_3 \nabla_t L_1 \times \nabla_t L_2
\end{aligned} \tag{8}
$$

ただし、$\nabla_t \times \boldsymbol{N}_{t7}$ については

$$
\begin{aligned}
\nabla_t \left(L_2 L_3 \right) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L_2 L_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L_2 L_3}{\partial y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L_2 L_3}{\partial L_2} \dfrac{\partial L_2}{\partial x} + \dfrac{\partial L_2 L_3}{\partial L_3} \dfrac{\partial L_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L_2 L_3}{\partial L_2} \dfrac{\partial L_2}{\partial y} + \dfrac{\partial L_2 L_3}{\partial L_3} \dfrac{\partial L_3}{\partial y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_3 \dfrac{\partial L_2}{\partial x} + L_2 \dfrac{\partial L_3}{\partial x} \\ L_3 \dfrac{\partial L_2}{\partial y} + L_2 \dfrac{\partial L_3}{\partial y} \end{bmatrix} \\
&= L_3 \nabla_t L_2 + L_2 \nabla_t L_3
\end{aligned}
$$

を用いた。

$\nabla_t L_m \times \nabla_t L_n \quad (m, n) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ は、

$$
\begin{aligned}
\nabla_t L_1 \times \nabla_t L_2 &= (b_1 \boldsymbol{a}_x + c_1 \boldsymbol{a}_y) \times (b_2 \boldsymbol{a}_x + c_2 \boldsymbol{a}_y) \\
&= b_1 c_2 \left(\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_y\right) + c_1 b_2 \left(\boldsymbol{a}_y \times \boldsymbol{a}_x\right) \\
&= \left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right) \boldsymbol{a}_z \\
&= \frac{1}{\left(2A_e\right)^2} \left(\bar{b}_1 \bar{c}_2 - \bar{b}_2 \bar{c}_1\right) \boldsymbol{a}_z \\
&= \frac{1}{\left(2A_e\right)^2} 2A_e \boldsymbol{a}_z \\
&\quad (\text{ただし、}\bar{b}_1 \bar{c}_2 - \bar{b}_2 \bar{c}_1 = 2A_e) \\
&= \frac{1}{2A_e} \boldsymbol{a}_z \\
\nabla_t L_2 \times \nabla_t L_3 &= \frac{1}{2A_e} \boldsymbol{a}_z \\
\nabla_t L_3 \times \nabla_t L_1 &= \frac{1}{2A_e} \boldsymbol{a}_z
\end{aligned}
\tag{9}
$$

と求まる。

3　まとめ

2 次元導波路の固有モードをベクトル波として解析するときに使用する edge elements と scalar nodal elements の 2 次要素を構成した。

4　参考文献

[1] Jin-Fa Lee, Din-Kow Sun, and Zoltan J. Cendes, ”Full-Wave Analysis of Dielectric Waveguides Using Tangential Vector Finite Elements”, IEEE Transacitons on Microwave Theory and Techniques, vol. 39, no. 8, pp.1262 - 1271, August 1991